Table des matières

1 Algèbre

Exercice 1 (Annales khass I.1)**.** *Montrer que* $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \mapsto & (2p+1)\,2^q \end{array}$ *est une bijection.*

Correction :

- *Soient* $p, q, k, \ell \in \mathbb{N}$ *tels que* $F(p,q) = F(k,\ell)$*. Alors*

$$(2p+1)\,2^q = (2k+1)\,2^\ell.$$

  $(\mathbb{R}, \leq)$ *étant un ensemble totalement ordonné, on a* $\ell \leq q$ *ou* $q \leq \ell$*. Sans perte de généralité, supposons* $\ell \leq q$*. Alors* $(2p+1)\,2^{q-\ell} = 2k+1$*.*
  Si $q-\ell > 0$*, alors* $2k+1$ *serait pair, ce qui est absurde ; donc* $\boxed{q = \ell}$*. Dès lors,* $2p+1 = 2k+1$ *puis* $\boxed{p = k}$*. Ainsi,* $\boxed{f \text{ est injective}}$*.*

- *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

  - *Si* n *est impair, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2k+1$ *donc* $n = F(k, 0)$*.*
  - *Si* n *est pair, alors* n *est un entier* ≥ 2*, dont la décomposition en nombre premiers est :*

$$n = 2^{\alpha_2} \prod_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \neq 2}} p^{\alpha_p} =: 2^{\alpha_2} N,$$

    où N *est impair (en tant que produit d'entiers impairs), donc s'écrit sous la forme* $N = 2k+1$*, avec* $k \in \mathbb{N}$*. Ainsi*

$$n = (2k+1)2^{\alpha_2} = F(k, \alpha_2).$$

  Dans tous les cas, on a montré que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ *avait au moins un antécédent par* F *dans* $\mathbb{N}^2$ *donc* $\boxed{F \text{ est surjective}}$*.*
  Variante : *l'ensemble* $A := \{k \in \mathbb{N}\ ;\ 2^k | n\}$ *est une partie non vide* $(0 \in A)$ *et majorée de* $\mathbb{N}$*, donc possède un plus grand élément. Notons* $q = \max(A)$*. Alors* $2^q | n$ *et* $2^{q+1} \nmid n$*. Ainsi,* $n = 2^q N$*, avec* N *impair donc de la forme* $N = 2p+1$*. Ainsi,* $n = F(p,q)$*.*

On en déduit que $\boxed{F \text{ est bijective}}$*.*

Exercice 2. *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.*
Montrer que f est bijective si, et seulement si, $\forall A \in \mathscr{P}(E), \quad f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.

Correction :

- *Supposons f bijective. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.*
  - *Soit $y \in f(C_E^A)$. Alors il existe $x \notin A$ tel que $y = f(x)$. Alors, $y \notin f(A)$. En effet, le contraire impliquerait l'existence de $a \in A$ tel que $y = f(a)$, et l'injectivité de f permettrait d'en déduire que $x = a \in A$, ce qui est absurde. Ainsi, $y \in C_F^{f(A)}$, et on a l'inclusion directe.*
  - *Soit $y \in C_F^{f(A)}$. Alors $y \notin f(A)$. Comme $y \in F$ et f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $y \notin f(A)$ donc $x \notin A$. Ainsi, $y \in f(C_E^A)$, et on a l'inclusion réciproque.*

  Ainsi, $\underline{f(C_E^A) = C_F^{f(A)}}$, ce qui montre l'implication directe.

- *Supposons que : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.*
  - *Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Fixons $A \in \mathscr{P}(E)$.*
    - *Si $y \in f(A)$, alors y a (au moins) un antécédent dans A.*
    - *Sinon, $y \in C_F^{f(A)} = f(C_E^A)$ par hypothèse, donc y a (au moins) un antécédent dans C_E^A.*

    Dans tous les cas, tout élément de F a au moins un antécédent dans E donc $\underline{f \text{ est surjective}}$.
    Alternative : *d'après l'hypothèse appliquée à $A = \varnothing$, on a : $C_E^{\varnothing} = E$ et $f(\varnothing) = \varnothing$ donc l'hypothèse donne directement : $f(E) = F$, ce qui signifie que f est surjective.*
  - *Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$.*
    Posons $A = \{x\}$. Alors $x' \notin A$ i.e. $x' \in C_E^A$ donc $f(x') \in f(C_E^A) = C_F^{\{f(x)\}}$, par hypothèse. Ainsi, $f(x') \neq f(x)$. Ainsi, par contraposée, $\underline{f \text{ est injective}}$.

  Ainsi, $\underline{f \text{ est bijective}}$, ce qui montre le sens indirect.

Exercice 3 (Mines PSI)**. Un isomorphisme.** *Soient E, F, G et H des espaces vectoriels tels que $E = G \oplus H$. Soit $A = \{u \in \mathcal{L}(E, F) \mid G \subset \mathrm{Ker}(u)\}$. Montrer que A est un espace vectoriel isomorphe à $\mathcal{L}(H, F)$.*

Trouvons un isomorphisme entre A et $\mathcal{L}(H, F)$. Soit $\boxed{\begin{array}{cccc} \Phi : & A & \to & \mathcal{L}(H,F) \\ & u & \mapsto & u_{|H} \end{array}}$.

- *A est un ssev de $\mathcal{L}(E, F)$ (le faire !) donc A et $\mathcal{L}(H, F)$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\forall (u, v) \in A^2, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \Phi(\alpha u + v) = (\alpha u + v)_{|H} = \alpha u_{|H} + v_{|H} = \alpha\Phi(u) + \Phi(v)$. Donc $\underline{\Phi \text{ est une application linéaire}}$.*

- *Soit $u \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Alors $u \in A$ et $u_{|H} = 0$, donc $G \subset \mathrm{Ker}(u)$ et $H \subset \mathrm{Ker}(u)$. Or, $\mathrm{Ker}(u)$ est un s.e.v.donc stable par somme d'où $E = G + H \subset \mathrm{Ker}(u)$, puis $\mathrm{Ker}(u) = E$ d'où $u = 0$ puis $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0\}$. Par ailleurs, $0 \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ donc on a l'égalité $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$. Ainsi, $\underline{\Phi \text{ est injectif}}$.*

- *Soit $v \in \mathcal{L}(H, F)$. Comme $E = G \oplus H$, on sait qu'une application linéaire sur E est complètement déterminée par sa restriction à G et à H. Soit donc $u : E = G \oplus H \to F$, linéaire, telle que $u_{|G} = 0$ et $u_{|H} = v$.*

En effet, $u : \begin{array}{ccc} G \oplus H & \to & F \\ g+h & \mapsto & v(h) \end{array}$ *vérifie :*

- $\forall g \in G,\ u(g) = u(g+0) = v(0) = 0$ *donc* $G \subset \mathrm{Ker}(u)$.
- $\forall h \in H,\ u(h) = u(0+h) = v(h)$ *donc* $u_{|H} = v$ *d'où* $\Phi(u) = v$.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $u \in A$ *et* $\Phi(u) = v$ *donc* u *est un antécédent de* v *par* Φ*, d'où* $\underline{\Phi \text{ est surjectif}}$.

- *Conclusion :* $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme donc } A \text{ et } \mathcal{L}(H,F) \text{ sont isomorphes}}$.

Exercice 4 (Annales khass I.6)**.** *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$*, avec* $\dim E = 3$*. On suppose* $f^2 = 0$ *et* $f \neq 0$.

1. *Quel est le rang de* f *?*
2. *Montrer qu'il existe une base* $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *de* E *telle que la matrice de* f *dans* $\mathscr{B}$ *soit* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Indication : *On pourra commencer par choisir* $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$.

Correction :

1. $f^2 = 0$ *implique que* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$*, donc* $\mathrm{rg}(f) \leq \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f)$*, en utilisant le théorème du rang. Ainsi,* $\mathrm{rg}(f) \leq \frac{3}{2}$*, et comme* $\mathrm{rg}(f) \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}(f) \in \{0, 1\}$.
   Or, f *n'est pas l'application nulle donc* $\mathrm{rg}(f) \neq 0$*. Ainsi,* $\boxed{\mathrm{rg}(f) = 1}$.

2. $f \neq 0$ *donc il existe* $e_3 \in E$ *tel que* $f(e_3) \neq 0$*. Ainsi,* $e_3 \notin \mathrm{Ker}(f)$*. De plus,* $f^2 = 0$ *donc* $\underline{f(e_3) \in \mathrm{Ker}(f)}$*, où* $(f(e_3))$ *est une famille libre de* $\mathrm{Ker}(f)$*. Or, d'après le théorème du rang,* $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$*, donc d'après le théorème de la base incomplète, il existe* $e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ *tel que* $\underline{(f(e_3), e_2) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f)}$.
   Il reste à vérifier que la famille $(f(e_3), e_2, e_3)$ *est une base de* E*. Soit* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *tel que* $af(e_3) + be_2 + ce_3 = 0$*. En appliquant* f*, qui est linéaire, on obtient :* $0 + 0 + cf(e_3) = 0$*. Or,* $f(e_3) \neq 0$ *par construction, donc* $c = 0$*. Ainsi,* $af(e_3) + be_2 = 0$*. La liberté de la famille* $(f(e_3), e_2)$ *permet d'en déduire que* $a = b = 0$*. Ainsi,* $(f(e_3), e_2, e_3)$ *est une famille libre de trois vecteurs de* E *et* E *est de dimension 3 donc* $\boxed{(f(e_3), e_2, e_3) \text{ est une base de } E}$*. Pour finir,* $\boxed{\mathrm{Mat}_{(f(e_3), e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   Donc $\boxed{\mathscr{B} = (f(e_3), e_2, e_3) \text{ convient}}$.

Exercice 5 (Annales khass I.10)**. Matrices d'Hadamard.** *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, avec* $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$*, telle que :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

1. *Démontrer que* A *est inversible.* **Indication :** *Considérer* $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X^T = (x_1 \ldots x_n)$*, tel que* $AX = 0$ *et introduire un indice* i_0 *tel que* $|x_{i_0}| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

2. *Montrer que* $\det(A) > 0$.

Correction :

1. *On sait que A est inversible si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0$. Raisonnons par l'absurde : on suppose que A n'est pas inversible ; il existe donc un $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = 0$. On note $X^T = (x_1 \dots x_n)$. Comme X est non nul, on choisit un indice $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que*

   - *x_{i_0} est non nul ;*
   - *mieux que ça : tel que $|x_{i_0}|$ est maximal.*

   Plus précisément, soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

   $$|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| : i \in [\![1, n]\!]\right\}.$$

   On a donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ |x_i| \leq |x_{i_0}|$. Aboutissons maintenant à une contradiction. On sait que $AX = 0$. Donc, sur la ligne i_0, on obtient que

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0.$$

   On fait passer tous les termes de la somme d'indice $j \neq i_0$ à droite de l'égalité, et on divise par x_{i_0}, qui est non nul par hypothèse. On obtient :

   $$a_{i_0,i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} \frac{x_j}{x_{i_0}}.$$

   En passant à la valeur absolue et en utilisant que $j \in [\![1, n]\!]$, $\left|\frac{x_j}{x_{i_0}}\right| \leq 1$, on obtient

   $$|a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|,$$

   ce qui contredit l'énoncé. Ainsi, $AX = 0$ est impossible pour $X \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \{0_E\}$ donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

2. *Comme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\det(A) \neq 0$. Considérons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \det(A + xI_n) \end{array}$. Il s'agit de montrer que $\det A = f(0) > 0$. Remarquons que f est une fonction polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}_+$, de monôme dominant x^n, donc en particulier, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par hypothèse sur A, la matrice $A + xI_n$ vérifie encore la condition d'Hadamard :*

   $$\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} + x \geq a_{i,i} > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|,$$

   donc d'après la question 1. appliquée à la matrice $A + xI_n$, $A + xI_n$ est inversible donc $f(x) = \det(A + xI_n) \neq 0$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annule pas sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires, que f est de signe fixe sur $\mathbb{R}_+$. De plus, le fait que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ assure que f prend des valeurs positives donc : $\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) > 0}$. En particulier, en $x = 0$, $\boxed{\det(A) = f(0) > 0}$.

Exercice 6 (Annales khass I.11, TD)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $A + B$ inversible. Montrer que : $\mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B = n$.*

Correction : *D'une part, $AB = 0$ implique que $\underline{\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)}$ donc $\mathrm{rg}(B) \leq \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A)$, d'après le théorème du rang. Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \leq n}$.*
D'autre part, $A + B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ implique que $\underline{\mathrm{rg}(A + B) = n}$. Or, $\mathrm{Im}(A + B) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ donc $\mathrm{rg}(A + B) \leq \dim(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$ (conséquence de la formule de Grassman). Ainsi, $\boxed{\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) \geq n}$.
Finalement, on a l'égalité : $\boxed{\mathrm{rg}A + \mathrm{rg}B = n}$.

Exercice 7 (Annales khass I.12)**.** *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A - I_3$.*

1. *Exprimer B^2 en fonction de B.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n, qu'on exprimera en fonction de n, tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.*
3. *La relation obtenue à la question précédente est-elle encore valable si n désigne un entier strictement négatif ?*

Correction :

1. $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:C} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 - 1 \end{pmatrix}}_{=:L}$.

   Donc $B^2 = C \underbrace{LC}_{\in\mathbb{R}} L$ et $CL = (1)$ donc $\boxed{B^2 = B}$.

2. *$B^2 = B$ donne $A^2 - 2A + I = A - I$ donc $A^2 - 3A + 2I = 0$ donc $\underline{A^2 = 3A - 2I}$.*
   $\mathrm{Vect}\,(I, A)$ est stable par produit, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in \mathrm{Vect}\,(I, A)$ donc il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ (uniques car (I, A) est libre) tel que $\boxed{A^n = a_n A + b_n I}$.
   Méthode 1. *On a $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$ donc $(a_0, b_0) = (0, 1)$.*
   On a $A^1 = I = 1 \times A + 0 \times I$ donc $(a_1, b_1) = (1, 0)$.
   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = AA^n$ donc $\underline{a_{n+1} = 3a_n + b_n}$ et $\underline{b_{n+1} = -2a_n}$, dont on déduit que $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Ainsi, (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui se factorise en $(r - 1)(r - 2) = 0$. Par théorème, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda 2^n + \mu 1^n$.
   Les conditions initiales donnent $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda + \mu = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.
   Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - 1}$ et $\boxed{b_n = -2a_{n-1} = 2 - 2^n}$.

Méthode 2 : *Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque B et I_3 commutent, la formule du binôme de Newton assure que*

$$A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Or, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = B$ et $B^0 = I_3$ donc

$$\begin{aligned} A^n &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B \\ &= I_3 + (2^n - 1)(A - I_3) \\ &= (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3. \end{aligned}$$

3. *On a $\frac{3A-A^2}{2} = I$ donc A est inversible, d'inverse $\boxed{A^{-1} = \frac{3I-A}{2}}$. On peut donc considérer les puissances négatives de A. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$. On vérifie (par récurrence ou calcul direct) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ a_{-n} = 2^{-n} - 1$ et $b_n = 2 - 2^{-n}$.*

Exercice 8 (Annales khass I.13)**.** *Calculer $S_n = \sum_{0\le 3k\le n} \binom{n}{3k}$, $T_n = \sum_{0\le 3k+1\le n} \binom{n}{3k+1}$ et $U_n = \sum_{0\le 3k+2\le n} \binom{n}{3k+2}$.*

Indication : *on pourra utiliser les polynômes :*

$$P_0 = \sum_{0\le 3k\le n} \binom{n}{3k} X^{3k} \text{ et } P_1 = \sum_{0\le 3k+1\le n} \binom{n}{3k+1} X^{3k+1} \text{ et } P_2 = \sum_{0\le 3k+2\le n} \binom{n}{3k+2} X^{3k+2}.$$

Correction : *Notons $Q = P_0 + P_1 + P_2 = (1 + X)^n$. On a :*
$Q(1) = P_0(1) + P_1(1) + P_2(1) = S_n + T_n + U_n = 2^n$
$Q(j) = P_0(j) + P_1(j) + P_2(j) = S_n + jT_n + j^2U_n = (1 + j)^n$
$Q(j^2) = P_0(j^2) + P_1(j^2) + P_2(j^2) = S_n + j^2T_n + jU_n = (1 + j^2)^n$, *ce qui fournit un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues.*
En sommant les trois équations et comme $1 + j + j^2 = 0$, on obtient :

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}\left[2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right]},\ \boxed{T_n = \frac{1}{3}\left[2^n + j^2(1+j)^n + j(1+j^2)^n\right]},\ \boxed{U_n = \frac{1}{3}\left[2^n + j(1+j)^n + j^2(1+j^2)^n\right]}.$$

Exercice 9 (Annales khass I.7)**.** *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $(X^2 + X + 1)^2$ divise le polynôme $(X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$.*

Correction : *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $P = (X + 1)^{6n+1} - X^{6n+1} - 1$ et remarquons que $(X^2 + X + 1)^2 = (X - j)^2(X - \bar{j})^2$. Il faut donc montrer que j et $\bar{j}$ sont racines de P de multiplicité au moins 2. Or, $P \in \mathbb{R}[X]$ donc il suffit de montrer que j est racine de P de multiplicité au moins 2. Deux calculs donnent :*

$$P(j) = (j + 1)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = (-j^2)^{6n+1} - j^{6n+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

et

$$P'(j) = (6n+1)(j+1)^{6n} - (6n+1)j^{6n} = (6n+1)(-j^2)^{6n} - (6n+1) = (6n+1) - (6n+1) = 0.$$

On a : $P(j) = P'(j) = 0$ donc j est racine de P de multiplicité au moins 2.
En conjuguant, il vient : $P(\bar{j}) = P'(\bar{j}) = 0$ donc $\bar{j}$ est racine de P de multiplicité au moins 2.
$j \neq j^2$ implique que : $(X-j)^2(X-\bar{j})^2 | P$ i.e. $\boxed{(X^2+X+1)^2 | P}$.

Exercice 10 (Annales khass I.3)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$*

1. *Justifier brièvement que f permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.*
2. *Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, exprimer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$.*
3. *Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Ces deux sous-espaces vectoriels sont-ils supplémentaires ?*
4. *Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}_n[X]$ dans laquelle f a pour matrice* $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   N.B. : Dans cette matrice carrée, les coefficients en ligne i et colonne $i-1$ valent 1 et les autres valent 0.
5. *Pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, déterminer $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$. Pour quelles valeurs de $k \in [\![2, n+1]\!]$, a-t-on $\operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k = \mathbb{C}_n[X]$?*

Correction :

1. *Il est clair que f est linéaire.*
   Si $P \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{C}_n[X]$ et puisque $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par différence $f(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.
   Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])}$.

2. *Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$. Alors*

$$f(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k[(X+1)^k - X^k] = \sum_{k=0}^{n} a_k \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j - X^k \right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j.$$

   Si P est constant alors $f(P)$ est nul ; sinon, notons $p = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$. Alors $a_p \neq 0$ et $\forall k \geq$

p, $a_k = 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \\ &= a_d \sum_{j=0}^{d-1} \binom{d}{j} X^j + \sum_{k=0}^{d-1} a_k \sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} X^j \\ &= d a_d X^{d-1} + Q, \end{aligned}$$

où $Q \in \mathbb{C}_{d-2}[X]$. Or, $da_d \neq 0$ donc $\underline{\deg(f(P)) = d-1}$. En conclusion :

$$\boxed{\deg(f(P)) = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \textit{si } \deg(P) \geq 1 \\ -\infty & \textit{si } \deg(P) \leq 0. \end{cases}}$$

3. - **Première méthode.** *<u>Regardons l'image de la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ par f</u> :* *$f(1) = 0$ donc $1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathcal{F} = (f(X), f(X^2), \dots, f(X^n))$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, non nuls et à degrés échelonnés, donc libre. Puisque $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n = \dim \mathbb{C}_{n-1}[X]$, $\mathcal{F}$ est une famille libre maximale donc une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 1$ et $\mathrm{rg}(f) \geq n$, mais d'après le théorème du rang leur somme vaut exactement $n+1$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, $\mathrm{rg}(f) = n$ et $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(1) = \mathbb{C}_0[X]}$, et $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,(f(X), f(X^2), \dots, f(X^n)) = \mathbb{C}_{n-1}[X]}$.*

   Deuxième méthode. *Un exercice classique consiste à montrer que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{C}_0[X]}$.*
   Le théorème du rang (appliqué à $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$ avec $\mathbb{C}_n[X]$ de dimension finie) assure que $\mathrm{rg} f = \dim \mathbb{C}_n[X] - \dim \mathbb{C}_0[X] = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{C}_{n-1}[X]$. De plus, la question 2. assure que $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Par inclusion et égalité des dimensions, on obtient $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}_{n-1}[X]}$.

   - *$\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}_0[X] \neq \{0\}$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe, donc pas supplémentaires.*

4. *On peut remarqué que f est un endomorphisme nilpotent d'indice $n+1$.*
   L'analyse sur les degrés montre que : $\begin{cases} \deg f^k(X^n) = n - k \ \textit{si}\ k \in [\![0, n]\!] \\ f^{n+1}(X^n) = 0. \end{cases}$
   Il en résulte que $\mathscr{B} := (X^n, f(X^n), f^2(X^n), \dots, f^n(X^n))$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{C}_n[X]$ (vecteurs non nuls et échelonnés en degré). Or, $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1 = \mathrm{Card}(\mathscr{B})$ donc $\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$ et $\boxed{\text{la matrice de } f \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est de la forme voulue}}$.

5. *Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$.*

   - *$\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{C}_n[X]) = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ d'où $\mathrm{Im}(f^2) = f^2(\mathbb{C}_n[X]) = f(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = \mathbb{C}_{n-2}[X]$ et par récurrence immédiate :* $\boxed{\mathrm{Im}(f^k) = f^k(\mathbb{C}_n[X]) = \begin{cases} \mathbb{C}_{n-k}[X] & \textit{si } k \leq n \\ \{0\} & \textit{si } k = n+1. \end{cases}}$

     De même, $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{C}_0[X]$, $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathbb{C}_1[X], \dots,$ $\boxed{\mathrm{Ker}(f^k) = \mathbb{C}_{k-1}[X]}$.

   - – *Si $k \neq n+1$, alors $\mathrm{Ker}(f^k) \cap \mathrm{Im}(f^k)$ contient $\mathbb{C}_0[X]$ donc $\mathrm{Ker}(f^k)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{C}_n[X]$.*

- *Si $k = n+1$, alors $\mathrm{Im}(f^{n+1}) = \{0\}$, et $\mathrm{Ker}(f^{n+1}) = \mathbb{C}_n[X]$ donc $\mathrm{Ker}(f^{n+1}) \oplus \mathrm{Im}(f^{n+1}) = \mathbb{C}_n[X]$.*

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k) = \mathbb{C}_n[X] \iff k = n+1}$.

Exercice 11 (Centrale)**.** *Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que :* $\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq 1$.

Correction : *Considérons le produit scalaire $(h|p) = \int_0^1 hp$ sur $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$).*
Les fonctions $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ sont bien définies et continues sur $[0,1]$ donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ donne :

$$\left\|\sqrt{f}\right\|^2 \times \|\sqrt{g}\|^2 \geq \left(\sqrt{f}|\sqrt{g}\right)^2,$$

i.e.

$$\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq \int_0^1 \sqrt{fg}.$$

Or, par hypothèse, fg est minorée par 1 donc $\sqrt{fg}$ aussi (par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$), puis par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on obtient $\int_0^1 \sqrt{fg} \geq 1$, donc par transitivité

$$\left(\int_0^1 f\right) \times \left(\int_0^1 g\right) \geq 1.$$

On conclut par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. *Justifier l'existence et calculer le minimum pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de* $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

- ***Première méthode (esprit euclidien)** : On considère le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}[X]$ qui à tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ associe*

$$< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^1 \left(t^2 - (at+b)\right)^2 \mathrm{d}t = \left\|X^2 - (aX+b)\right\|^2$.

En notant $F = \mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ le ssev de $\mathbb{R}[X]$, on a d'après le cours que le minimum existe et représente le carré de la distance entre X^2 et F :

$$\boxed{m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\|X^2 - (aX+b)\right\|^2 = \min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \left\|X^2 - P\right\|^2 = \mathrm{d}(X^2, F)^2 = \left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2}.$$

  - *Vérifions que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.*
    - *$< \cdot, \cdot >$ est clairement une forme bilinéaire symétrique et positive.*
    - *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $< P, P >= 0$. Alors $\int_0^1 P(t)^2 \mathrm{d}t = 0$. Or, $t \mapsto P(t)^2$ est positive et continue donc elle est nulle sur $[0,1]$. Le polynôme P a donc une infinité de racines sur l'intervalle $[0,1]$ donc $P = 0$. Ainsi, $< \cdot, \cdot >$ est définie.*

  Ainsi, $\boxed{< \cdot, \cdot > \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$.

- *Soit on utilise une BON de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire :*
$(1, X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. On peut l'orthonormaliser à l'aide de l'algorithme de Gram-Schimidt en la famille (f_1, f_2) avec :

$$\boxed{f_1 = 1}, \qquad \boxed{f_2 = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)}.$$

Puisque (f_1, f_2) est une BON de F, on a : $p_F(X^2) = (X^2|f_1)f_1 + (X^2|f_2)f_2$ et on en déduit la valeur de $m = \|X^2 - p_F(X^2)\|^2$.

- *Soit on utilise les propriétés des orthogonaux et projetés.*
On a : $p_F(X^2) \in F$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p_F(X^2) = aX + b$.
De plus, $X^2 - p_F(X^2) \in F^\perp$ donc $\begin{cases} (X^2 - p_F(X^2)|1) = 0 \\ (X^2 - p_F(X^2)|X) = 0. \end{cases}$
Ainsi, $(p_F(X^2)|1) = (X^2|1)$ et $(p_F(X^2)|X) = (X^2|X)$
d'où $(aX + b|1) = (X^2|1)$ et $(aX + b|X) = (X^2|X)$.
Or, $(1|1) = 1$; $(1|X) = \frac{1}{2}$; $(X|X) = \frac{1}{3}$; $(1|X^2) = \frac{1}{3}$; $(X|X^2) = \frac{1}{4}$.
Donc (a, b) vérifie le système : $\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} \end{cases}$.
La résolution de ce système donne : $a = 1$ et $b = -\frac{1}{6}$ d'où $\underline{p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}}$.

$$m = \left\|X^2 - p_F(X^2)\right\|^2 = (X^2 - \underbrace{p_F(X^2)}_{\in F} \,|\, \underbrace{X^2 - p_F(X^2)}_{\in F^\perp}) = (X^2|X^2 - p_F(X^2))$$
$$= \int_0^1 t^2(t^2 - t + \frac{1}{6})\mathrm{d}t = \int_0^1 (t^4 - t^3 + \frac{1}{6}t^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{180}.$$

Ainsi, $\boxed{m = \frac{1}{180}}$.

- ***Deuxième méthode (esprit fonction de deux variables)*** *: Posons pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,*

$$g(a, b) = \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. En développant, on obtient :

$$g(a, b) = \int_0^1 (t^4 + a^2t^2 + b^2 - 2at^3 - 2bt^2 + 2abt)\mathrm{d}t.$$

A l'aide d'une primitive, on obtient :

$$g(a, b) = \frac{1}{5} + \frac{a^2}{3} + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + ab.$$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que fonction polynomiale de deux variables, et ses dérivées partielles en tout point (a, b) sont :

$$\partial_1 g(a, b) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{2} + b \quad \text{et} \quad \partial_2 g(a, b) = 2b - \frac{2}{3} + a.$$

Donc (a,b) est un point critique de g ssi $\begin{cases} \frac{2a}{3}+b &= \frac{1}{2} \\ a+2b &= \frac{2}{3} \end{cases}$ *ssi* $(a,b) = \left(1, -\frac{1}{6}\right)$.

De plus, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} g\left(1+h, -\frac{1}{6}+k\right) - g\left(1, -\frac{1}{6}\right) &= \frac{1}{3}\left[(1+h)^2 - 1\right] + \left(-\frac{1}{6}+k\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{h}{2} - \frac{2k}{3} + (1+h)\left(-\frac{1}{6}+k\right) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}\left[2h+h^2\right] + k\left(k - \frac{1}{3}\right) - \frac{h}{2} - \frac{2k}{3} - \frac{1}{6} + k - \frac{h}{6} + hk + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}h^2 + k^2 + hk + 0\times h + 0 \times k \\ &= \left(k+\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)h^2 \\ &= \left(k+\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{12} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc g admet un minimum global en $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$, qui vaut $\boxed{g\left(1, -\frac{1}{6}\right) = \dots = \frac{1}{5} - \frac{7}{36} = \frac{1}{180}}$.

Exercice 13 (Annales khass I.5)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \mathbb{R}_{2n}[X]$.*

1. *Pour $(P,Q) \in E_n^2$, on pose $(P|Q) = \sum\limits_{k=-n}^{n} P(k)Q(k)$. Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E_n.*
2. *Soit $H_n = \left\{P \in E_n \;\middle|\; \int_{-1}^{1} P(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$. Montrer que H_n est un sous-espace vectoriel de E_n ; quelle est sa dimension ? Donner une base de son orthogonal.*
3. *On prend $n = 1$. Calculer $d(X^2, H_1)$.*

Correction :

1. *$(P,Q) \mapsto (P|Q)$ est clairement une forme bilinéaire symétrique.*
   Soit $P \in E_n$. $(P|P) = \sum\limits_{k=-n}^{n} P(k)^2 \geq 0$, car les carrés réels sont positifs d'où $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ est positive.
   De plus, si $(P|P) = 0$ alors $\forall k \in [\![-n,n]\!]$, $P(k) = 0$ d'où P est un polynôme de degré au plus $2n$ qui possède au moins $2n+1$ racines d'où $P = 0$. Ainsi, $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ est définie. On en déduit que $\boxed{(P,Q) \mapsto (P|Q) \text{ est un produit scalaire sur } E_n}$.

2. *Soit* $\varphi : \begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \int_{-1}^{1} P \end{array}$. *Alors φ est une forme linéaire non nulle (car $\varphi(1) = 2 \neq 0$) sur E_n et*
   $H_n = \mathrm{Ker}(\varphi)$ donc H_n est un hyperplan de E_n. En particulier, $\boxed{H_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_n}$ *et* $\boxed{\dim(H_n) = \dim(E_n) - 1 = (2n+1) - 1 = 2n}$.
   Puisque E_n est de dimension finie, on a $E_n = H_n \oplus H_n^{\perp}$ donc $H_n^{\perp}$ est une droite vectorielle, donc il suffit de trouver un vecteur non nul dans $H_n^{\perp}$.
   - *On peut remarquer que la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux $2n+1$ points distincts $-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n$ est une B.O.N. de E_n pour ce produit scalaire.*

En effet, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, *on a* $L_k = \dfrac{\prod_{j\neq k}(X-j)}{\prod_{j\neq k}(k-j)}$. *Pour tout* $(p,q) \in [\![-n,n]\!]^2$, *on a* $(L_p|L_q) = \sum_{k=-n}^{n} \underbrace{L_p(k)}_{=\delta_{p,k}} L_q(k) = L_q(p) = \delta_{p,q}$, *donc* <u>$(L_k)_{-n\leq k\leq n}$ *est une famille orthonormale*</u>, *donc une famille* <u>*libre maximale*</u> *de vecteurs de* E_n, *donc* $\boxed{\text{une base, orthonormale, de } E_n}$.

- *Soit* $P \in E_n$. *Alors* $P = \sum_{k=-n}^{n} P(k)L_k$. *Par linéarité de* φ, *on a* $\varphi(P) = \sum_{k=-n}^{n} P(k)\varphi(L_k)$.

  Posons alors $\boxed{Q = \sum_{k=-n}^{n} \varphi(L_k)L_k \in E_n}$. *Puisque* $(L_k)_{-n\leq k\leq n}$ *est une B.O.N. de* E_n, *on a*

$$\boxed{(P|Q) = \sum_{k=-n}^{n} P(k)\varphi(L_k) = \varphi(P)}.$$

  Ainsi,

$$H_n = \{P \in E_n \mid \varphi(P) = 0\} = \{P \in E_n \mid (P|Q) = 0\} = Q^\perp.$$

  Donc <u>$Q \in H_n^\perp$</u>, *et* <u>$Q \neq 0$</u> *(sinon,* H_n *serait égal à* E_n *et ne serait pas un hyperplan de* E_n, *ou bien* φ *serait nulle), d'où* $\boxed{H_n^\perp = \mathrm{Vect}\,(Q)}$.

3. *Pour* $n = 1$, $E_1 = \mathbb{R}_2[X]$ *et* $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \int_{-1}^{1} P = 0\} = \{aX^2 + bX - \frac{a}{3} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ *est bien un hyperplan de* E_1, *et* $H_1^\perp = \mathrm{Vect}\,(Q)$ *où*

$$Q = \varphi(-1)L_{-1} + \varphi(0)L_0 + \varphi(1)L_1,$$

   et

$$\begin{aligned} L_{-1} &= \frac{(X-0)(X-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}X(X-1) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X, \\ L_0 &= \frac{(X-1)(X+1)}{(0-1)(0+1)} = (1-X)(X+1) = -X^2 + 1, \\ L_1 &= \frac{(X-0)(X+1)}{(1-0)(1+1)} = \frac{1}{2}X(X+1) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}X. \end{aligned}$$

   Or,

$$d(X^2, H_1) = \left\| p_{H_1^\perp}(X^2) \right\| = \left| (X^2 | \frac{Q}{\|Q\|}) \right| = \frac{|(X^2|Q)|}{\|Q\|},$$

   car $\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right)$ *est une B.O.N. de* $H_1^\perp$.
   D'une part, $(X^2|Q) = \varphi(X^2) = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.
   D'autre part, puisque (L_{-1}, L_0, L_1) *est une BON de* $\mathbb{R}_2[X]$, *on a*

$$\|Q\| = \sqrt{\varphi(L_{-1})^2 + \varphi(L_0)^2 + \varphi(L_1)^2}.$$

Un calcul donne :

$$\varphi(L_{-1}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^2 - x\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3} = \varphi(L_1)$$
$$\varphi(L_0) = \int_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Donc

$$\|Q\| = \sqrt{\frac{18}{9}} = \sqrt{2}$$

On en déduit que

$$\boxed{d(X^2, H_1) = \frac{2/3}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

Exercice 14 (Annales khass I.2)**.** *Soit* $(a_1, \ldots, a_n, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$*. Calculer* $\det\begin{pmatrix} x+a_1 & x & \ldots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \ldots & x & x+a_n \end{pmatrix}$.

Correction : *Notons* $X = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ *et* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *(identifié à* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$*). On cherche* $D = \det(X + a_1\varepsilon_1, X + a_2\varepsilon_2, \ldots, X + a_n\varepsilon_n)$*.*
Le caractère alterné du déterminant montre que, quand on développe l'expression ci-dessus par linéarité par rapport à chaque colonne, les termes s'annulent dès que deux colonnes au moins sont égales à X*. Il reste donc :*

$$D = \det(a_1\varepsilon_1, \ldots, a_n\varepsilon_n) + \det(X, a_2\varepsilon_2, \ldots, a_n\varepsilon_n) + \det(a_1\varepsilon_1, X, \ldots, a_n\varepsilon_n) + \cdots + \det(a_1\varepsilon_1, \ldots, a_{n-1}\varepsilon_{n-1}, X)$$
$$= \boxed{a_1 \ldots a_n + \sum_{k=1}^{n} x \prod_{i \neq k} a_i}.$$

Remarque : $D = \sigma_n + x\sigma_{n-1}$ *(fonction symétriques élémentaires).*

Exercice 15 (Annales khass I.8)**.** *On munit* $\mathbb{R}^3$ *de sa structure euclidienne usuelle et on note* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *sa base canonique.*
Soit u_1, u_2, u_3 *trois vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*,* P *la matrice dans la base* $\mathcal{B}$ *de* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *défini par :*
$\forall i \in [\![1, 3]\!]\,,\ f(e_i) = u_i$.
Soit enfin le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3) \end{vmatrix}$.

1. *Exprimer* Δ *à l'aide de* $\det(P)$*.*
2. *Montrer que* $\Delta \geq 0$*.*
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $\Delta = 0$*.*

4. *On suppose (u_1, u_2) libre et on pose $d = d(u_3, \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2))$.*
   Montrer que $d^2 = \frac{\Delta}{\delta}$, où $\delta = \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix}$.

Correction : *Notons* $M(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|u_3) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|u_3) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|u_3) \end{pmatrix}$.

1. *Pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, notons C_i est le vecteur coordonnée de $f(e_i) = u_i$ dans la BON $\mathscr{B}$ donc*
$$(u_i|u_j) = C_i^T\ C_j.$$
   Par définitions, on a
$$P = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3),$$
   et
$$M(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} P^T C_1 & P^T C_2 & P^T C_3 \end{pmatrix} = P^T\ P.$$
   Ainsi,
$$\boxed{\Delta = \det(P^T\ P) = \det(P^T) \det P = (\det P)^2}.$$

2. *On a : $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\det P \in \mathbb{R}$ et* $\boxed{\Delta = (\det P)^2 \in \mathbb{R}_+}$.

3. *On a : $\Delta = 0 \iff \det P = 0 \iff P \notin \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \iff \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, u_3) = 0 \iff (u_1, u_2, u_3)$ liée.*

4. *On note $F = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$, et x le projeté orthogonal de u_3 sur F. On a*
$$d = d(u_3, F) = \|u_3 - x\|\ .$$
   On écrit :
$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|x + (u_3 - x)) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|x + (u_3 - x)) \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & (u_3|x + (u_3 - x)) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & (u_1|x) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & (u_2|x) \\ \underbrace{(u_3|u_1)}_{=(x|u_1)} & \underbrace{(u_3|u_2)}_{=(x|u_2)} & \underbrace{(u_3|x)}_{=(x|x)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & \underbrace{(u_1|u_3 - x)}_{=0} \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & \underbrace{(u_2|u_3 - x)}_{=0} \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & \underbrace{(u_3|u_3 - x)}_{=(u_3 - x|u_3 - x) = \|u_3 - x\|^2} \end{vmatrix} \qquad \textit{(linéarité 3ème colonne)} \\
&= \underbrace{\det(M(u_1, u_2, x))}_{=0 \text{ car } (u_1, u_2, x) \text{ est liée}} + \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) & 0 \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) & 0 \\ (u_3|u_1) & (u_3|u_2) & \|u_3 - x\|^2 \end{vmatrix} \\
&= 0 + \|u_3 - x\|^2 \begin{vmatrix} (u_1|u_1) & (u_1|u_2) \\ (u_2|u_1) & (u_2|u_2) \end{vmatrix} \qquad \textit{(dvpt p.r. à la 3ème colonne)} \\
&= d^2 \delta.
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $\delta \neq 0$, ce qui est le cas puisque (u_1, u_2) est libre (même argument que dans la question 3.). Ainsi, $\boxed{d^2 = \dfrac{\Delta}{\delta}}$.

Exercice 16 (Annales khass I.9)**.** *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :*

- *$AB = BA$;*
- *B est nilpotente (c'est-à-dire il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $B^p = 0$).*

1. *Montrer que si A est inversible, alors $A + B$ est inversible.*
2. *Montrer que si A est inversible, alors $\det(A + B) = \det A$.*
3. *Si A n'est pas inversible, a-t-on encore $\det(A + B) = \det A$?*

Correction :

1. *cf TD. Supposons A inversible. Alors on écrit : $A+B = A(I + A^{-1}B)$ et il n'y a plus qu'à montrer que $I + A^{-1}B$ est inversible. Or, cette matrice est de la forme $I + N$ avec N une matrice nilpotente (car A^{-1} et B commutent et B est nilpotente). Classiquement, $I + N$ est inversible d'inverse $1 - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{p-1}N^{p-1}$.*

2. *Supposons A inversible.*
On écrit encore $A + B = A(I + A^{-1}B)$. Alors $\det(A + B) = \det(A)\det(I + A^{-1}B)$, donc il suffit de montrer que $\det(I + A^{-1}B) = 1$. Montrons que pour toute matrice nilpotente N, on a $\det(I + N) = 1$. Pour cela, on va montrer le lemme : si N est nilpotente, alors N est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Supposons ce lemme acquis, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}NP = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$. Donc $P^{-1}(I+N)P = \begin{pmatrix} 1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$, qui est de déterminant 1. Ainsi, $\det(I + N) = 1$, ce qui conclura.
Montrons le lemme, par récurrence sur la taille de N.

   - *Si $N \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $N = (0)$ et on a l'initialisation.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}^**. Supposons que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}$.*
   Soit $N \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ nilpotente. Considérons l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^{n+1}$ canoniquement associé à N. Alors u n'est pas injectif (car endomorphisme nilpotent en dimension finie). Soit donc $e_1 \in \mathrm{Ker} u \setminus \{0\}$. La famille (e_1) est donc une famille libre de $\mathbb{K}^{n+1}$, que l'on complète en une base $\mathscr{C} = (e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. En notant $P_1 \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique vers $\mathscr{C}$, on a

$$N' := {P_1}^{-1}NP_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right), \text{ avec } M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Par produit par blocs, on obtient facilement que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ (N')^k = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M^k & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

ce qui assure que <u>*M est nilpotente*</u>*.*
Par hypothèse de récurrence, il existe donc $P_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$P_2{}^{-1} M P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix} =: T.$$

Posons $Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$. *Alors $Q \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ (évident grâce au rang ou au déterminant) et* $Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$, *puis* $Q^{-1} N' Q = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & P_2^{-1} M P_2 = T & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ *est triangulaire supérieure stricte. D'où l'hérédité, ce qui conclut la récurrence et prouve le lemme.*

3. *Supposons A non inversible. Alors $A+B$ n'est pas inversible (sinon, $A = (A+B)+(-B)$ le serait d'après 1.). Donc $\det(A+B) = 0 = \det(A)$. La réponse est donc* $\boxed{\textit{oui}}$ *: pour A et B deux matrices carrées qui commutent, avec B nilpotente, on a* $\boxed{\det(A+B) = \det A}$.
   Alternative : *sauf pour un nombre fini de $x \in \mathbb{K}$, $A + xI$ est inversible (car $x \mapsto \det(A+xI)$ est polynomiale) donc $\det(A+xI+B) = \det(A+xI)$, d'après ce qui précède.*
   Les fonctions $x \mapsto \det(A+xI+B)$ et $x \mapsto \det(A+xI)$ sont polynomiales et coïncident sur un nombre infini de points, donc sont égales ! En particulier, pour $x = 0$, on a $\det(A+B) = \det(A)$.

2 Analyse

Exercice 17. *En utilisant les éléments de $\mathbb{U}_7$, exhiber une équation de degré 3 dont $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est solution.*

Correction : *Posons $\zeta_7 = e^{i\frac{2\pi}{7}} = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$.*
On a

$$\mathbb{U}_7 = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \zeta_7^4, \zeta_7^5, \zeta_7^6\right\} = \left\{1, \zeta_7, \zeta_7^2, \zeta_7^3, \overline{\zeta_7^3}, \overline{\zeta_7^2}, \overline{\zeta_7}\right\}.$$

Classiquement, la somme des éléments de $\mathbb{U}_7$ vaut 0, donc

$$0 = 1 + \left(\zeta_7 + \overline{\zeta_7}\right) + \left(\zeta_7^2 + \overline{\zeta_7^2}\right) + \left(\zeta_7^3 + \overline{\zeta_7^3}\right) = 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right). \qquad (*)$$

La formule de doublement de l'angle donne $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. On a aussi :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}(e^{3i\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^3)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta)\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.\end{aligned}$$

En posant $\underline{x = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)}$, on obtient $\underline{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) = 2x^2 - 1}$ et $\underline{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right) = 4x^3 - 3x}$, puis en reportant dans $(*)$:

$$1 + 2x + 2(2x^2 - 1) + 2\left(4x^3 - 3x\right) = 0,$$

donc $\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \text{ est solution de l'équation de degré 3 : } 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.}$

Exercice 18.

1. *Déterminer une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sin t}$ sur $]0, \pi[$.*
   Indication : *On pourra utiliser l'angle moitié.*
2. *Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle*

$$\sin(t)y' + y = t\sin(t)(1 + \cos(t)).$$

Correction :

1. *Soit $t \in]0, \pi[$. Alors $\frac{t}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\frac{t}{2} > 0$ et $\tan\frac{t}{2}$ est bien défini.*
   Par factorisation par l'angle moitié, on obtient : $\sin(t) = \dfrac{2\tan\frac{t}{2}}{1+\tan^2\frac{t}{2}}$ donc

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1 + \tan^2\frac{t}{2}}{2\tan\frac{t}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{t}{2})}{\tan\frac{t}{2}} = \frac{u'(t)}{u(t)}, \text{ avec } u : t \mapsto \tan\frac{t}{2}.$$

   Ainsi, $\boxed{t \mapsto \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| \text{ est une primitive de } t \mapsto \frac{1}{\sin t}}$.

2.
- $\sin$ *ne s'annule pas sur* $]0,\pi[$ *donc il faut résoudre l'équation* $(E) : y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{=:a(t)} y = \underbrace{t(1+\cos t)}_{=:b(t)}$.

- *Résolution de l'équation homogène* (H) *:* $y' + \underbrace{\frac{1}{\sin t}}_{=:a(t)} y = 0$.

  $A : t \mapsto \ln\left(\tan \frac{t}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\right)$ *est une primitive de* a *donc*

$$\boxed{S(H) = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(t \mapsto \frac{\lambda}{\tan\frac{t}{2}}\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}}.$$

- *Trouvons une solution particulière de l'équation de départ : on utilise la méthode de la variation de la constante* (λ)*. On a :*

$$\begin{aligned}\forall t,\ y_P(t) = \lambda(t)e^{-A(t)} \in S(E) &\Leftrightarrow \forall t,\ y_P'(t) + a(t)y_P(t) = b(t) \Leftrightarrow \forall t,\ \lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t)\\ &\Leftrightarrow \forall t,\ \lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}.\end{aligned}$$

  Il faut donc choisir une fonction λ *telle que pour tout* $t \in]0,\pi[$, $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$.
  - *Calculons* $\int be^A$. *Soit* $t \in]0,\pi[$.

$$\begin{aligned}\int_0^t be^A &= \int_0^t x(1+\cos x)\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \int_0^t x \times 2\cos^2\frac{x}{2} \times \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^t 2x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^t x\sin x\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

    Une IPP donne : $\int_0^t x\sin x\mathrm{d}x = -t\cos t + \sin t$.

  - *Dès lors,* $\boxed{y_P : t \mapsto (\sin t - t\cos t)\frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

- *Finalement :* $\boxed{S(E) = \left\{t \mapsto \frac{\sin t - t\cos t + \lambda}{\tan\frac{t}{2}}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$

Exercice 19. Formule de Taylor-Lagrange. *Soient* a *et* b *deux réels tels que* $a < b$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *vérifiant les trois conditions suivantes :*

- f *admet des dérivées jusqu'à l'ordre* n *sur* $[a,b]$ *;*
- $f^{(n)}$ *est continue sur* $[a,b]$ *;*
- $f^{(n)}$ *est dérivable sur* $]a,b[$.

Montrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ *tel que :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ *est appelé* ***reste de Lagrange****.*

Correction : Méthode 1 : *Soit A le nombre réel défini par :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}A,$$

et φ l'application définie sur $[a,b]$ par :

$$\varphi : x \mapsto f(b) - \left[f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A\right].$$

Il est clair que φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifie $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or le calcul de φ' donne, par télescopage :

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[A - f^{(n+1)}(x)\right].$$

Pour $x = c$, et sachant que $\dfrac{(b-c)^n}{n!} \neq 0$, on obtient $\boxed{A = f^{(n+1)}(c)}$, ce qui conclut.

Méthode 2 : *Soit $\psi : x \mapsto f(x) - \left[f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}B\right]$, définie sur $[a,b]$.*

ψ est donc $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ et pour tout $x \in]a,b[$,

$$\psi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - B(x-a) \quad \text{et} \quad \psi^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - B.$$

Tout d'abord, $\psi(a) = 0$. On pose B tel que $\psi(b) = 0$. Dès lors, $\psi(a) = \psi(b)$. De plus, ψ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à ψ, il existe $b_1 \in]a,b[$ tel que $\psi'(b_1) = 0$.

Mais $\psi'(a) = 0 = \psi'(b_1)$, et en appliquant le théorème de Rolle à ψ', on obtient l'existence de $b_2 \in]a,b_1[$ tel que $\psi''(b_2) = 0$.

En itérant, on construit $b_1, \ldots, b_n$ tels que $a < b_n < \cdots < b_2 < b_1 < b$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\psi^{(k)}(b_k) = 0$. En particulier, $\psi^{(n)}(b_n) = 0$.

Dès lors, $\psi^{(n)}(a) = \psi^{(n)}(b_n)$, $\psi^{(n)}$ est continue sur $[a,b_n]$, dérivable sur $]a,b_n[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à $\psi^{(n)}$, il existe $c \in]a,b_n[$ tel que $\psi^{(n+1)}(c) = 0$.

On a donc

$$f^{(n+1)}(c) = B, \text{ et } B \text{ tel que } \psi(b) = 0,$$

ce qui conclut.

Remarque : *pour $n = 0$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.*

Exercice 20 (Annales khass II.1). *Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose* $\varphi(n,p) = \left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^{1/p}\right)^p$.

1. *Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $v_p := \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n,p)$, puis $\lim\limits_{p\to+\infty} v_p$.*
2. *Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n := \lim\limits_{p\to+\infty} \varphi(n,p)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.*

Correction :

1. • *Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme de Riemann, où $x \mapsto (1+x)^{1/p} \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, donc*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p} = \int_0^1 (1+x)^{1/p}\mathrm{d}x = \left[\frac{p}{p+1}(1+x)^{\frac{1}{p}+1}\right]_0^1 = \frac{p}{p+1}\left(2^{\frac{p+1}{p}}-1\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{v_p = \left[\frac{p}{p+1}\left(2^{\frac{p+1}{p}}-1\right)\right]^p}.$$

• *Posons $u = \frac{1}{p}$. Alors par composition de limites :*

$$\lim_{p\to+\infty} v_p = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{1+u}(2^{1+u}-1)\right)^{1/u} = \lim_{u\to 0}\exp\left(\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{1+u}(2^{1+u}-1)\right)\right).$$

Or, $\frac{1}{1+u} = 1-u+o(u)$ et

$$\begin{aligned}2^{1+u}-1 &= 2\times 2^u - 1 = 2e^{(\ln 2)u}-1 = 2\left(1+(\ln 2)u+o(u)\right)-1\\ &= 1+(\ln 4)u+o(u).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+u}(2^{1+u}-1) = 1+\underbrace{(\ln(4)-1)u+o(u)}_{\to 0},$$

d'où

$$\ln\left(\frac{1}{1+u}(2^{1+u}-1)\right) = (\ln(4)-1)u+o(u), \quad \text{et} \quad \frac{1}{u}\ln\left(\frac{1}{1+u}(2^{1+u}-1)\right) = \ln(4)-1+o(1).$$

Ainsi, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u}\ln\left(\dfrac{1}{1+u}(2^{1+u}-1)\right) = \ln(4)-1$, puis par continuité de l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} v_p = \lim_{y\to\ln(4)-1} e^y = e^{\ln(4)-1} = \frac{4}{e}}.$$

2. • *Fixons $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$w_n = \lim_{p\to+\infty}\exp\left[p\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)\right].$$

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p} = \exp\left[\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right] = 1+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{p}+\underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{p}\right).$$

D'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p} = 1+\frac{1}{p}\times\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}_{=:s_n}+\underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{p}\right) = 1+\underbrace{s_n\frac{1}{p}+\underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{p}\right)}_{\to 0}.$$

Ainsi,

$$p\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right) = s_n + \underset{p\to+\infty}{o}(1).$$

Finalement, par continuité de l'exponentielle :

$$w_n = \lim_{p\to+\infty}\exp\left[p\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/p}\right)\right] = \lim_{y\to s_n} e^y = e^{s_n},$$

donc

$$\boxed{w_n = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)}.$$

- *Par ailleurs, en reconnaissant encore une somme de Riemann, on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\times\ln(1+x)\mathrm{d}x \\ &= [(1+x)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 1\mathrm{d}x \quad \textit{(par intégration par parties)} \\ &= 2\ln(2)-1 = \ln(4)-1.\end{aligned}$$

D'où, par continuité de l'exponentielle : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \exp\left(\ln(4)-1\right) = \frac{4}{e}}$.

Exercice 21 (Annales khass II.2)**.** *Soit $\omega\in\mathbb{R}$. Déterminer les couples (x,y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $t\in\mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t)+\sin(\omega t) \\ y'(t) = x(t)-\cos(\omega t). \end{cases} \qquad (*)$$

Correction : *Procédons par analyse-synthèse (ce sera en fait des équivalences).*
Soient x et y des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $z : t\mapsto x(t)+iy(t)$. Alors z est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$, $z'(t) = x'(t)+iy'(t)$.
Si (x,y) est solution de $(*)$ alors pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} z'(t) &= -y(t)+\sin(\omega t)+i(x(t)-\cos(\omega t)) \\ &= i[x(t)+iy(t)] - i[\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)] \\ &= iz(t) - ie^{i\omega t}, \end{aligned}$$

donc z est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et second membre *exponentiel :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) - iz(t) = -ie^{i\omega t} \quad (E).$$

Réciproquement, il est immédiat que si z est solution de (E), alors $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sont solutions du système $(*)$. Il suffit donc de résoudre (E).

- *L'équation homogène associée est : $z'(t) - iz(t) = 0$ de solutions $t \mapsto Ce^{it}$, avec $C \in \mathbb{C}$.*
- *Déterminons une solution particulière.*

En utilisant le cas favorable. *L'équation caractéristique associée est $r - i = 0$ de racine i, et $i\omega = i \Longleftrightarrow \omega = 1$.*

- *Cas où $\omega \neq 1$.* *On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto Ae^{i\omega t}$ et on trouve (après calculs) $A = \dfrac{1}{1-\omega} \in \mathbb{R}$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{i\omega t}}{1-\omega}$ est solution particulière de (E).*
- *Cas où $\omega = 1$.* *On cherche une solution particulière de la forme $t \mapsto Bte^{it}$ et on trouve (après calculs) $B = -i$ donc $t \mapsto -ite^{it}$ est solution particulière de (E)*

Avec la variation de la constante. *Soient C une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $z : t \mapsto C(t)e^{it}$. Un calcul donne $z' - iz : t \mapsto C'(t)e^{it}$.*
Donc z est solution de (E) ssi $\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)e^{it} = -ie^{i\omega t}$ ssi $\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t) = -ie^{i(\omega-1)t}$.
Distinguons les cas.

- *Cas où $\omega \neq 1$.* *On pose $C : t \mapsto \dfrac{-i}{i(\omega-1)}e^{i(\omega-1)t} = \dfrac{e^{i(\omega-1)t}}{1-\omega}$ donc $z : t \mapsto \dfrac{e^{i\omega t}}{1-\omega}$ est solution de (E).*
- *Cas où $\omega = 1$.* *Alors $C' = -i$ donc on pose $C : t \mapsto -it$ et $z : t \mapsto -ite^{it}$ est solution de (E).*

Quelle que soit la méthode :

- **pour** $\omega \neq 1$, *les solutions de (E) sont les*

$$z : t \mapsto Ce^{it} + \frac{1}{1-\omega}e^{i\omega t}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Par unicité des fonctions parties réelles et imaginaires de z (en écrivant $C = a + ib \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ et comme $\omega \in \mathbb{R}$), on a

$$\boxed{x : t \mapsto a\cos t - b\sin t + \frac{1}{1-\omega}\cos(\omega t)} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \mapsto a\sin t + b\cos t + \frac{1}{1-\omega}\sin(\omega t)}.$$

- **pour** $\omega = 1$, *les solutions de (E) sont les*

$$z : t \mapsto (C - it)e^{it}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Par unicité des fonctions parties réelles et imaginaires de z (en écrivant $C = a + ib \in \mathbb{R} + i\mathbb{R}$), on a

$$\boxed{x : t \mapsto a\cos t + (t-b)\sin t} \quad \text{et} \quad \boxed{y : t \mapsto (b-t)\cos t + a\sin t}.$$

Remarque (autre méthode). *On peut aussi remarquer que si (x, y) est solution de $(*)$, alors x est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x''(t) + x(t) = (\omega + 1)\cos(\omega t)$ (équation différentielle du second ordre à coefficients constants, avec second membre favorable), que l'on peut résoudre. Une fois que x est connue, la deuxième équation de $(*)$ donne y' et en intégrant, on a y.*

Exercice 22 (Annales khass II.3)**.** *Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$.*

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la série de terme général u_n converge.*
   Indication : *on pourra considérer la suite de terme général $w_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$.*
   On suppose désormais que (a, b) vérifie cette condition.

2. *Montrer que $nu_n \to 0$.*

3. *Calculer la somme de la série de terme général u_n.*

Correction :

1. *Posons $w_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$. On sait que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ssi la série $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge.*
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \ln\left((n+1)^{b-a}u_{n+1}\right) - \ln\left(n^{b-a}u_n\right) \\
&= (b-a)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) && \text{où } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{b}{n}} \\
&= (b-a)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{b}{n}\right) \\
&= (b-a)\left[\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] + \frac{a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{b}{n} - \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{b-a}{n} + \frac{a}{n} - \frac{b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

   $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une SATP convergente (série de Riemann), donc par théorème de comparaison, $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est absolument convergente, donc convergente, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, vers un réel noté λ. Par continuité de exp, $n^{b-a}u_n \to e^\lambda \neq 0$ donc $\boxed{u_n \sim \frac{e^\lambda}{n^{b-a}}}$.
   On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{b-a}}$ (par théorème de comparaison des SATP).
   Connaissant les cas de convergence des séries de Riemann, on en déduit

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge } \iff b - a > 1}.$$

   On suppose désormais que $b - a > 1$.

2. *On a* $nu_n \sim \dfrac{e^{\lambda}}{n^{b-a-1}}$ *avec* $b-a-1>0$*, donc* $\dfrac{e^{\lambda}}{n^{b-a-1}} \to 0$ *et par conservation de la limite dans les équivalents,* $\boxed{nu_n \to 0}$.

3. *Soit* $N \in \mathbb{N}$*. On a :* $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n$
donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)u_{n+1} - au_n = 0$
donc $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1} - nu_n + (b-1)(u_{n+1}-u_n) + (b-1-a)u_n = 0.$
En sommant pour n *de* 0 *à* N*, on obtient par télescopage :*

$$\underbrace{(N+1)u_{N+1}}_{\to 0 \text{ d'après 2.}} - 0u_0 + (b-1)\left(\underbrace{u_{N+1}}_{\to 0} - u_0\right) + (b-1-a)\sum_{n=0}^{N} u_n = 0.$$

On a $u_N \to 0$ *(terme général d'une série convergente) donc en passant à la limite quand* $N \to +\infty$*, on obtient*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(b-1)u_0}{b-a-1}}.$$

Exercice 23 (Annales khass II.4)**.** *Soit* $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

1. *Démontrer que pour tout* $f \in E$*, et pour tout* $x \in [0,1]$*, il existe* $c \in \,]0,1[$ *tel que* $f(x) = f''(c)\,\frac{x(x-1)}{2}$.

2. *Montrer qu'il existe* $M > 0$*, que l'on déterminera, tel que :* $\forall f \in E,\ \displaystyle\int_0^1 |f| \leq M \sup_{[0,1]} |f''|$*. Déterminer la meilleure valeur de* M*.*

Correction :

1. *Soient* $f \in E$ *et* $x \in [0,1]$*.*
Si $x = 0$ *ou* $x = 1$ *n'importe quel* c *convient.*
Supposons maintenant que $x \in]0,1[$*. On peut trouver* $A \in \mathbb{R}$ *tel que la fonction*

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - A\frac{t(t-1)}{2} \end{array}$$

s'annule en x *(prendre* $A = \frac{2f(x)}{x(x-1)}$*, qui est bien défini car* $x \in]0,1[$*). La fonction* φ *est donc de classe* $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *et s'annule en 0,* x *et 1 et on a* $0 < x < 1$*. Par application du théorème de Rolle sur* $[0,x]$ *et sur* $[x,1]$*, on obtient l'existence de* $a \in]0,x[$ *et* $b \in]x,1[$ *tels que* $\varphi'(a) = \varphi'(b) = 0$*. En appliquant encore le théorème de Rolle à* $\varphi' \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$*, on obtient :* $\exists c \in]a,b[\mid \varphi''(c) = 0$*. Or,* $\varphi'' = f'' - A$ *donc* $\boxed{\exists c \in]a,b[\subset]0,1[:\ f''(c) = A = \frac{2f(x)}{x(x-1)}}$*, ce qui conclut.*

2. *Soit* $f \in E$*. D'après la question 1., pour tout* $x \in [0,1]$*, il existe* $c \in]0,1[$ *tel que* $f(x) = f''(c)\frac{x(x-1)}{2}$*.*
De plus, $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *donc* $f'' \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *donc* $\sup |f''|$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *et on le notera* $\|f''\|_\infty$*.*
Ainsi,

$$\forall x \in [0,1],\ |f(x)| \leq \frac{x(1-x)}{2}\, \|f''\|_\infty\,,$$

puis par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 |f| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x = \frac{\|f''\|_\infty}{2}\int_0^1 (x-x^2)\mathrm{d}x = \frac{\|f''\|_\infty}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\|f''\|_\infty}{12}.$$

$\boxed{M = \frac{1}{12} \text{ convient}}$.
C'est même la meilleure valeur possible pour M*, car cette borne est atteinte pour la fonction* $g : x \mapsto \frac{x(1-x)}{2}$*. En effet,* $g \in E$*,* $\displaystyle\int_0^1 |g| = \frac{1}{12}$*,* $g'' : x \mapsto -1$ *donc* $\|g''\|_\infty = 1$.

Exercice 24 (Annales khass II.5). *1. Soit* $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $f(0) = 0$*. On pose, pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$*. Montrer que* $u_n \to f'(0)/2$.

2. *On suppose maintenant que* f *est de classe* $\mathscr{C}^1$*, que* $f(0) = 0$ *et que* $f''(0)$ *existe. Montrer que* $u_n \to f'(0)/2$.
3. *Soient* f *comme en 2. et* $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *On pose pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *:* $v_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$*. Déterminer la limite de* (v_n).

Correction :

1. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in [\![1,n]\!]$*. On a* $1 \leq k \leq n \leq n^2$ *donc* $0 \leq \frac{k}{n^2} \leq 1$*. Puisque* $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *et* $f(0) = 0$*, on sait d'après le TAF qu'il existe* $x_{k,n} \in \left]0, \frac{k}{n^2}\right[$ *tel que*

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) = \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n}).$$

Ainsi, $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n})$ *donc*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f'(x_{k,n}).$$

Étudions la suite $\left(u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$*. Pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\left|u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\left[f'(x_{k,n}) - f'(0)\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\left|f'(x_{k,n}) - f'(0)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}x_{k,n}\|f''\|_\infty && \text{d'après l'I.A.F. appliquée à } f' \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})\,^* \\
&\leq \|f''\|_\infty \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^2 && \text{car } 0 \leq x_{k,n} \leq \frac{k}{n^2} \\
&\leq \|f''\|_\infty \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}.
\end{aligned}$$

> *En effet, $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ donc $f' \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et f'' est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée par le réel $\|f''\|_\infty$. D'après l'I.A.F., on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $|f'(x_{k,n}) - f'(0)| \leq \|f''\|_\infty x_{k,n}$.*

Puisque $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \to 0$, on a par théorème d'encadrement que

$$u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

D'où, par opération sur les suites convergentes, on conclut que :

$$u_n = \underbrace{\left(u_n - f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)}_{\to 0} \quad + \quad f'(0) \quad \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)}_{=\frac{n(n+1)}{2n^2}\to 1/2} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f'(0)}{2}.$$

2. *L'hypothèse $f''(0)$ existe signifie que f' est dérivable en 0. Ainsi, f' admet un DL à l'ordre 1 en 0 :*

$$f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x).$$

Puisque f est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$, on a par théorème de primitivation des DL que f admet un DL à l'ordre 2 en 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + o(x^2).$$

Puisque $f(0) = 0$, on a

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + f''(0)\frac{k^2}{2n^4} + \frac{k^2}{n^4}\varepsilon_{k,n}, \qquad \text{où} \qquad \varepsilon_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

En sommant, on obtient :

$$u_n = f'(0)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}}_{\to 1/2} + f''(0)\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}}_{\to 0} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\varepsilon_{k,n}.$$

Or, toute suite convergente est bornée donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe $M_k \in \mathbb{R}$ tel que $|\varepsilon_{k,n}| \leq M_k$ et en posant $M = \max\limits_{1\leq k\leq n} M_k$, on a : $k \in [\![1,n]\!]$, $\varepsilon_{k,n} \leq M$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\varepsilon_{k,n}\right| \leq \underbrace{M\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}}_{\to 0}$ donc par théorème d'encadrement $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4}\varepsilon_{k,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, par opération sur les limites, on trouve à nouveau : $\boxed{u_n \to \frac{f'(0)}{2}}$.

3. *Comme dans la question précédente, on peut écrire :*

$$f(x) = f'(0)x + \mathcal{O}(x^2).$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{k^2}{n^4}\right)$ *donc*

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) = f'(0)\frac{k}{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{k^2}{n^4} b_{k,n} \qquad \text{avec } (b_{k,n})_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ une suite bornée.}$$

En sommant, on obtient :

$$v_n = f'(0) \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right) + M \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4}}_{\to 0},$$

où M est, comme dans la question précédente, un majorant des suites $(b_{1,n})_{n\in\mathbb{N}^*}, \ldots, (b_{n,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Or, par convergence des sommes de Riemann (car $t \mapsto tg(t) \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} g\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t.$$

Ainsi, par opération sur les suites convergentes, on a

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)\int_0^1 tg(t)\mathrm{d}t}.$$

Exercice 25 (Annales khass II.6)**.** *Soit* $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}\cdot$

1. *Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.* *Déterminer les racines de P_n.*
2. *Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq n!$.*

Correction :

1.
$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{\frac{1}{2i}\left[(x+i)-(x-i)\right]}{(x+i)(x-i)} = \frac{\frac{1}{2i}}{x-i} + \frac{-\frac{1}{2i}}{x+i}.$$

Remarquons que si $g : x \mapsto (x-\alpha)^{-1}$ alors $g' : x \mapsto -(x-\alpha)^{-2}$, …, et on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g^{(n)} : x \mapsto (-1)^n n!(x-\alpha)^{-n-1}$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}} - \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!\left[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right]}{(x^2+1)^{n+1}},$$

et cette formule est encore valable pour $n = 0$ donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{\frac{1}{2i}(-1)^n n!\left[(x+i)^{n+1} - (x-i)^{n+1}\right]}{(x^2+1)^{n+1}}}.$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Posons $\underline{P_n = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]} \in \mathbb{C}[X]$*. Alors*

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}[i^{n+1-k} - (-i)^{n+1-k}]X^k\right) \\
&= \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(0 + 2i(n+1)X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}[i^{n+1-k} - (-i)^{n+1-k}]X^k\right) \\
P_n &= (-1)^n (n+1)! X^n + Q, \qquad \text{avec } Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X].
\end{aligned}$$

Donc P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n(n+1)!$. Déterminons les racines de P_n dans $\mathbb{C}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
P_n(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha+i)^{n+1} = (\alpha-i)^{n+1} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\right)^{n+1} = 1 \qquad \text{car } \alpha \neq i \text{ vu que } i \text{ n'est pas racine de } P_n \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,n]\!],\ \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \qquad \text{car } i \neq -i \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ (\alpha+i) = (\alpha-i)e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ \alpha(1-e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}) = -i\left(1+e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}\right) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ \alpha = -i\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}} = -i\frac{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{e^{i\frac{k\pi}{n+1}}(-2i)\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in [\![1,n]\!],\ \alpha = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, notons $\alpha_k := \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, et remarquons que $0 < \frac{k\pi}{n+1} < \pi$.
Vérifions que les $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ sont deux à deux distincts.
Sur l'intervalle $]0,\pi[$, cotan est bien définie et $\operatorname{cotan}' = \left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \dfrac{-\sin^2-\cos^2}{\sin^2} = \dfrac{-1}{\sin^2} < 0$, donc cotan est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, donc injective. Puisque $\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de n réels distincts de $]0,\pi[$, leurs images par cotan sont également deux à deux distinctes.
Ainsi, nous avons trouvé les n racines de P_n, qui donc se factorise en :

$$\boxed{P_n = (-1)^n(n+1)!\ \prod_{k=1}^{n}\left(X - \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}\right) \in \mathbb{R}[X]}.$$

2. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente,*

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right),$$

donc
$$|f^{(n)}(x)| = \frac{n!}{2}\left|\frac{1}{(x-i)^{n+1}} - \frac{1}{(x+i)^{n+1}}\right| \leq \frac{n!}{2}\left(\frac{1}{|x-i|^{n+1}} + \frac{1}{|x+i|^{n+1}}\right),$$
par inégalité triangulaire. Or, $x \in \mathbb{R}$ donc $|x-i| = |x+i| = \sqrt{x^2+1} \geq 1$ donc $|x-i|^{n+1} = |x+i|^{n+1} \geq 1$ puis $\dfrac{1}{|x-i|^{n+1}} + \dfrac{1}{|x+i|^{n+1}} \leq 2$ d'où $\boxed{|f^{(n)}(x)| \leq n!}$.

Exercice 26 (Annales khass II.7)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Cette suite est-elle monotone ?*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$u_n = \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t,$$
où α est un réel et g une fonction continue sur $[0,1]$ à expliciter.
3. *Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.*

Correction :

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
- *On a : $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} \leq t^n$ donc par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, on a $0 \leq u_n \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$. Par théorème d'encadrement, on a $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.*
- *On a, par linéarité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}-t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^n(t-1)}{\sqrt{1+t^2}}}_{\leq 0}\,\mathrm{d}t \leq 0$, par positivité de l'intégrale sur le segment $[0,1]$. Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.*

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une IPP, on écrit :
$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 t^n \times \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\underbrace{\frac{t^{n+1}}{n+1}}_{=u(t)}\underbrace{(1+t^2)^{-1/2}}_{=v(t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} \times -\frac{1}{2}(2t)(1+t^2)^{-3/2}\mathrm{d}t \qquad \text{avec } u,v \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \\
&= \frac{1/\sqrt{2}}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\alpha}{n+1} + \int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{avec } \alpha = 1/\sqrt{2} \text{ et } g : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

(c) Puisque $g \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$, on sait d'après le TBA que g est bornée. On peut considérer $\|g\|_\infty$, et on a $0 \leq g \leq \|g\|_\infty$. Par positivité de l'intégrale, on a $0 \leq \int_0^1 t^{n+1}g(t)\,\mathrm{d}t \leq$

$\|g\|_\infty \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\|g\|_\infty}{n+2}$. *Par théorème d'encadrement, on a* $\int_0^1 t^{n+1}g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *donc*

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1}g(t)}{n+1}\,\mathrm{d}t = o\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

On en déduit que $u_n \sim \dfrac{\alpha}{n+1}$ *puis* $\boxed{u_n \sim \dfrac{1}{n\sqrt{2}}}$.

Exercice 27 (Annales khass II.8)**.** *Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble*

$$E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = \frac{x}{2} + 1 \right\}.$$

1. *On suppose que* $f \in E$.

   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{f(x)}{2} + 1$. *(b) Montrer que* f' *est constante.*

2. *Conclure.*

Correction :

1. *Soit* $f \in E$.

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $f \in E$,

   $$f\left(\frac{x}{2}+1\right) = f\left[f(f(x))\right] = \frac{f(x)}{2} + 1.$$

   (b) $f \in E$ *donc* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *En dérivant l'égalité précédente, il vient :*

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2}f'\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{f'(x)}{2},\ \text{puis } \underline{\forall x \in \mathbb{R},\ f'\left(\frac{x}{2}+1\right) = f'(x)}.$$

   Fixons $x \in \mathbb{R}$ *et introduisons la suite* (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \end{cases}$.

   - **Méthode 1.** (u_n) *est une suite arithmético-géométrique de point fixe 2, donc* $(u_n - 2)$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{2}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 2 = (u_0 - 2)\frac{1}{2^n}$ *d'où* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (x-2)\frac{1}{2^n} + 2$ *puis* $\underline{(u_n) \text{ converge vers } 2}$.
   - **Méthode 2.** *on écrit* $u_{n+1} = g(u_n)$ *avec* $g : t \mapsto \frac{t}{2} + 1$, *qui est* $\frac{1}{2}$*-lipschitzienne sur* $\mathbb{R}$ *(car* $|g'|$ *est majoré par* $\frac{1}{2}$ *et en utilisant l'IAF). De plus,* $g(t) = t \iff t = 2$, *donc* g *a un unique point fixe, qui vaut* 2. *Classiquement, on a* $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x - 2|$ *et* $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ *donc* $\underline{(u_n) \text{ converge vers } 2}$.

   De plus, $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(u_{n+1}) = f'(u_n)$ *donc en itérant* $\forall n \in \mathbb{N},\ f'(u_n) = f'(u_0) = f'(x)$.
   Or, f' *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc en particulier au point 2, d'où par passage à la limite dans l'égalité précédente :* $\underline{f'(x) = f'(2), \text{ ceci pour tout } x \in \mathbb{R}}$. *On en déduit que* $\boxed{f' \text{ est constante}}$.

2. *On vient de montrer que si* $f \in E$, *alors* f' *est constante donc* f *est une fonction affine.*

Soit $f : x \mapsto ax + b$, *avec* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Alors* $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(f(x)) = af(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + b(1 + a).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f \in E &\iff \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{x}{2} + 1 = a^2x + b(1 + a) \\ &\iff a^2 = \frac{1}{2} \text{ et } b(1 + a) = 1 && \text{(unicité de l'écriture d'un polynôme)} \\ &\iff a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } b = \frac{1}{1 + a}. \end{aligned}$$

Finalement, E *est un ensemble fini à deux éléments :*

$$\boxed{E = \left\{\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right); \left(x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}\right)\right\}}.$$

Exercice 28 (Annales khass II.9)**.** *Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble* E *des fonctions* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

1. *On suppose que* $f \in E$. *Montrer que* $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et que* f *est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.*

2. *Conclure.*

Correction :

1. $f \in E$ *donc*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 - x\int_0^x f + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*).$$

   $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral,* $x \mapsto x\int_0^x f$ *et* $x \mapsto x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de classe* $\mathscr{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$. *Par opérations,* f *est également de classe* $\mathscr{C}^1$. *Mais alors,* $x \mapsto x\int_0^x f$ *et* $x \mapsto x\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* f *aussi. On pourrait même montrer que* $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   En dérivant $(*)$, *on obtient :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\int_0^x f - xf(x) + xf(x) = -\int_0^x f.$$

   En dérivant à nouveau, on obtient : $f'' = -f$ *(*f *est solution de l'EDL homogène à coefficients constants).*

2. *D'après ce qui précède, on a trouvé que* $E \subset \mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = a\cos + b\sin$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, grâce à deux IPP :

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\cos t \mathrm{d}t &= [(x-t)\sin t]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \sin t \mathrm{d}t \\ &= 0 + [-\cos t]_0^x \\ &= 1 - \cos x,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\sin t \mathrm{d}t &= [(x-t)(-\cos t)]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \cos t \mathrm{d}t \\ &= x - [\sin t]_0^x \\ &= x - \sin x.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = a + bx - a\cos - b\sin = a + bx - f(x).$$

Donc :

$$f \in E \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ a + bx = 1 \iff (a = 1 \ \text{et} \ b = 0).$$

En conclusion,

$$\boxed{E = \{\cos\}}.$$

Exercice 29 (Annales khass II.10, TD)**.** *On définit f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \frac{\sin(1/x)}{2}$.*

1. *Montrer que $f(\mathbb{R}^*) \subset \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ et que $f \circ f(\mathbb{R}^*) \subset [1, +\infty[$.*
2. *Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[1, +\infty[$.*
3. *Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [1, +\infty[$ tel que $f(\ell) = \ell$.*
4. *Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in \mathbb{R}^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$.*

cf TD dérivation.

Exercice 30 (Annales khass II.11, TD)**.** *Déterminer la nature, selon les réels positifs a et b, de la série de terme général :*

$$u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + b}.$$

cf TD série.

Exercice 31 (Annales khass II.12)**.**

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x - e^{-x} = n$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note désormais x_n cette solution.*
2. *Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.*
3. *Donner un équivalent simple de $x_n - n$ lorsque n tend vers l'infini.*

Correction :

1. *Soit* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - e^{-x} \end{array}$. *$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + e^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc f induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.*
Comme de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection monotone :
$$\underline{f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[=] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}.}$$
Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Alors $n \in \mathbb{R}$ donc n a un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction f, ce qui assure que $\boxed{\text{l'équation } x - e^{-x} = n \text{ a une unique solution dans } \mathbb{R}, \text{ que l'on notera } x_n}$.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
***Méthode 1 :** Par définition de x_n, on a :*
$$\frac{x_n}{n} = \frac{n + e^{-x_n}}{n} = 1 + \frac{e^{-x_n}}{n}.$$
Or, $x_n = n + e^{-x_n} > 0$ donc $e^{-x_n} \leq 1$ et $0 \leq \frac{e^{-x_n}}{n} \leq \frac{1}{n}$. Par encadrement, il vient $\underline{\frac{e^{-x_n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
Ainsi, $\boxed{\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.
***Méthode 2 :** On a : $f(n) = n - e^{-n} < n = f(x_n)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $n < x_n$. De plus : $f(n+1) = n + \underbrace{(1 - e^{-(n+1)})}_{>0} > n = f(x_n)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $n + 1 > x_n$.*
Ainsi, $n < x_n < n+1$, puis $1 < \frac{x_n}{n} < 1+\frac{1}{n}$, d'où par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n} = 1$ donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n}$.

Méthode 3 :

- *On a : $n+1 > n > -1$ et $f(0) = -1$ d'où $f(x_{n+1}) > f(x_n) > f(0)$. Or, f est croissante, donc on en déduit que $x_{n+1} > x_n > 0$ (sinon...). Ainsi, la suite (x_n) est strictement croissante. D'après le théorème de la limite monotone, on sait que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ ou bien diverge vers $+\infty$.*
- *Raisonnons par l'absurde, en supposant que (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ (donc en ℓ), on aurait : $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell) \in \mathbb{R}$. Or, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. L'unicité de la limite de $(f(x_n))$ mène à une contradiction. Ainsi, (x_n) diverge vers $+\infty$.*
- *Enfin, $\frac{x_n}{n} = \frac{n + e^{-x_n}}{n} = 1 + \frac{1}{ne^{x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi,* $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\sim} n}$.

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $f(x_n) = n$ donc $\underline{x_n - n = e^{-x_n}}$. On conjecture que $x_n - n \sim e^{-n}$. Montrons-le. On a :*
$$\frac{x_n - n}{e^{-n}} = e^{n - x_n} = e^{-e^{-x_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
car $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $e^{-x_n} \to 0$ et $e^y \xrightarrow[y\to0]{} 1$. Ainsi,
$$\boxed{x_n - n \sim e^{-n}}.$$

Exercice 32 (Annales khass II.13)**.** *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+\sin x)^{\ln x/x} - x}{x^2 \ln x}$.

Correction : *On a :*

$$\begin{aligned}
(1+\sin x)^{\ln x/x} &= \exp\left[\frac{\ln x}{x}\ln\left(1+x+o(x^2)\right)\right] \\
&= \exp\left[\frac{\ln x}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\right] \\
&= \exp\left(\ln x - \frac{x\ln x}{2} + o(x\ln x)\right) \\
&= x\exp\left(-\frac{x\ln x}{2} + o(x\ln x)\right) \\
&= x\left(1-\frac{x\ln x}{2}+o(x\ln x)\right) && \text{car } x\ln x \to 0 \\
&= x - \frac{x^2\ln x}{2} + o(x^2\ln x).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la limite cherchée est } \frac{-1}{2}}$.

Exercice 33 (Annales khass II.15)**.** *On pose* $v_n = e - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$ *et* $u_n = \left(e - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\right)^{1/n}$ *pour* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Montrer :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists c_n \in [0,1] \ :\ v_n = \frac{e^{c_n}}{n!}.$$
2. *Trouver un développement limité à deux termes en* $1/n$ *de* c_n.
   On admet que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *au voisinage de* $+\infty$.
3. *Donner un équivalent simple* w_n *de* u_n*, puis un équivalent de* $u_n - w_n$.

Correction :

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On reconnaît dans* $e - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}$ *le reste de Taylor de* exp *en 0 à l'ordre* $n-1$ *évalué en 1. Or, la fonction* exp *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur le segment* $[0,1]$ *donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on a*
$$e - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}\exp^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$
   Donc
$$\boxed{n!v_n = n\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^t\mathrm{d}t}.$$
   Or, pour tout $t \in [0,1]$*, on a* $1 \le e^t \le e$ *et* $(1-t)^{n-1} \ge 0$ *donc*
$$(1-t)^{n-1} \le (1-t)^{n-1}e^t \le e(1-t)^{n-1},$$

et par croissance de l'intégrale sur le segment $[0,1]$*, on a :*

$$\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t \leq n!v_n \leq e\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

Or, $\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t = [-(1-t)^n]_0^1 = 1$*, donc*

$$\boxed{e^0 = 1 \leq n!v_n \leq e}.$$

Puisque $\exp$ *est continue sur le segment* $[0,1]$*,* $\boxed{\textit{le TVI assure l'existence de } c_n \in [0,1] \textit{ tel que } n!v_n = e^{c_n}}$.

2. *On veut le développement asymptotique de* c_n *à la précision* $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$*. Déterminons d'abord celui de* e^{c_n} *au même ordre.*
D'après 1., on a $v_{n+3} = \dfrac{e^{c_{n+3}}}{(n+3)!}$*, avec* $v_{n+3} = v_n - \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+2)!}$*, donc*

$$\frac{e^{c_n}}{n!} = v_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{e^{c_{n+3}}}{(n+3)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned} e^{c_n} &= 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{e^{c_{n+3}}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= 1 + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2}(1+o(1)) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{c_n = \ln(e^{c_n}) = \ln\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}.$$

3. *Par définition, on a :*

$$u_n = v_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(v_n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{e^{c_n}}{n!}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\left(c_n - \ln(n!)\right)\right).$$

Or, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *donc* $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))$ *donc*

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) + \ln(1+o(1)) \\ &= n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1), \end{aligned}$$

et d'après la question précédente, $c_n = o(1)$ *donc*

$$\frac{1}{n}\left(c_n - \ln(n!)\right) = -\ln n + 1 + o(1).$$

D'où

$$u_n = \exp\left(-\ln n + 1 + o(1)\right) = \frac{e}{n} e^{o(1)} \sim \frac{e}{n}.$$

donc

$$\boxed{u_n \sim w_n \qquad \text{avec} \qquad w_n = \frac{e}{n}}.$$

En reprenant le calcul précédent, on a :

$$\frac{1}{n}\left(c_n - \ln(n!)\right) = -\ln n + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(-\ln n + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= \frac{e}{n}\exp\left(\underbrace{-\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}_{\to 0}\right) \\ &= \frac{e}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$u_n - w_n = -\frac{e\ln n}{2n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{u_n - w_n \sim -\frac{e\ln n}{2n^2}}.$$

Exercice 34 (Annales khass II.16, environ TD)**.** *Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad (*).$$

Indication : *On pourra poser $x = e^t$.*

Correction : *Procédons par analyse-synthèse.*

Analyse. *Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ telle que vérifiant $(*)$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc par composée, $f' \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On peut donc dériver $(*)$ et on obtient :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \; f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

Donc f est solution de l'EDL d'ordre 2 à coefficients non constants $x^2 f'' + f = 0$. Pour la résoudre, posons, comme l'indication le suggère, la fonction $g = f \circ \exp$ (donc $f = g \circ \ln$), définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad g(t) = f(e^t) \qquad g'(t) = e^t f'(e^t) \qquad g''(t) = e^t f'(e^t) + (e^t)^2 f''(e^t).$$

Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; g''(t) - g'(t) + g(t) = (e^t)^2 f''(e^t) + f(e^t) = 0,$$

d'après l'EDL vérifiée par f.

Remarque : *on aurait aussi pu poser d'emblée $g = f \circ \exp$, ce qui donne*

$$g'(t) = e^t f'(e^t) \underset{(*)}{=} e^t f\left(\frac{1}{e^t}\right) = e^t f(e^{-t}) = e^t g(-t)$$

et

$$g''(t) = e^t g(-t) - e^t g'(-t) = g'(t) - e^t e^{-t} g(t) = g'(t) - g(t).$$

Ainsi, g est solution de l'EDL d'ordre 2 à coefficients constants $g'' - g' + g = 0$, d'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, ayant pour racines $-j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-j$.
Par théorème, il existe donc $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = e^{t/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$ donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) &= f(e^{\ln x}) = g(\ln x)\\ &= e^{\ln x/2}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)\\ &= \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right).\end{aligned}$$

Synthèse. *Soient $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$.*
On a d'une part :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right],$$

et d'autre part :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{A + B\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \frac{B - A\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right].$$

En particulier, pour avoir $f'(1) = f(1)$, il est nécessaire que $\frac{A+B\sqrt{3}}{2} = A$, donc $A = B\sqrt{3}$. Ainsi, $\frac{B-A\sqrt{3}}{2} = -B$ et on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = f'(x)$, donc f vérifie $(*)$. On en déduit que les fonctions $f : x \mapsto B\sqrt{x}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right]$ sont solutions du problème.

En conclusion, l'ensemble des fonctions de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ vérifiant $(*)$ est

$$\boxed{\left\{x \mapsto B\sqrt{x}\left[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)\right] \;\middle|\; B \in \mathbb{R}\right\}},\ i.e.\ \boxed{\left\{x \mapsto C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Exercice 35 (Annales khass II.17).

1. *Déterminer* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3}$.

2. *On pose* $E = \left\{K > 0 \mid \forall x \geq 0\,,\ \left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| \leq Kx^3\right\}$. *Déterminer E.*
   On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, on a :

$$\forall (a,x) \in I^2, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Correction :

1. *Soit $x > 0$.*

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{6}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Donc : $\dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3} = \dfrac{1}{16} + o(1)$, *d'où*

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}}{x^3} = \frac{1}{16}.}$$

2. *Soit $x \geq 0$. La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t}$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ donc d'après la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x :*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \int_0^x f^{(3)}(t)\frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{d}t.$$

On calcule : $f(t) = (t+1)^{1/2}$, $f'(t) = \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}$, $f''(t) = \frac{-1}{4}(t+1)^{-3/2}$, $f^{(3)}(t) = \frac{3}{8}(t+1)^{-5/2}$. Alors :

$$\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}\right| = \frac{3}{16}\left|\int_0^x \frac{(x-t)^2}{(t+1)^{5/2}}\mathrm{d}t\right| = \frac{3x^3}{16}\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ux+1)^{5/2}}\mathrm{d}u,$$

en faisant le changement de variables $t = ux$ (car $u \mapsto ux \in \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R})$) et par positivité de l'intégrale sur $[0,1]$.

Notons $\varphi : x \mapsto \dfrac{3}{16}\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^2}{(ux+1)^{5/2}}\mathrm{d}u$. Alors $E = \{K > 0 \mid \forall x \geq 0,\ \varphi(x) \leq K\}$. En revenant à la définition, on peut montrer que la fonction φ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que φ est maximale en 0 donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(x) \leq \varphi(0) = \frac{3}{16}\int_0^1 (1-u)^2\mathrm{d}u = \frac{3}{16}\int_0^1 v^2\mathrm{d}v = \frac{1}{16}.$$

L'ensemble E, qui représente l'ensemble des majorants de la fonction φ, vaut donc $\boxed{E = \left[\frac{1}{16}, +\infty\right[}$.

Exercice 36 (Annales khass II.18)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ f(x+y)f(x-y) = \Big(f(x)f(y)\Big)^2 \qquad (*).$$

1. *Déterminer f si $f(0)=0$. Quelles sont les autres valeurs possibles pour $f(0)$?*
2. *On suppose $f(0)=1$.*
   (a) *Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x)$ en fonction de $f(x)$. Montrer que f est à valeurs >0.*
   (b) *On pose $g = \ln f$. Montrer que :*
   $$\forall y \in \mathbb{R}\,,\ \int_0^1 g(x+y)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x-y)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + 2g(y).$$
   En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
   (c) *Déterminer f.*
3. *Déterminer f si $f(0)=-1$.*

Correction :

1. *Si $f(0)=0$, alors*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x+0)f(x-0) = (f(x)f(0))^2 = 0,$$
donc $\boxed{f \text{ est nulle}}$.
De manière générale, on a $f(0+0)f(0-0) = (f(0)f(0))^2$ i.e. $f(0)^2 = f(0)^4$ donc $f(0)^2(1-f(0)^2) = 0$ d'où $f(0)=0$ ou $f(0)^2=1$. Ainsi, $\boxed{f(0) \in \{-1,0,1\}}$.

2. (a) *On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+x)\underbrace{f(x-x)}_{=f(0)=1} = (f(x)f(x))^2$ i.e. $f(2x) = f(x)^4$, donc*
$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f\left(\frac{y}{2}\right)^4 \geq 0.$$
S'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y)=0$. Alors $f\left(\frac{y}{2}\right)=0$ puis par récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{y}{2^n}\right)=0$. Or, $\frac{y}{2^n} \to 0$ et f est continue en 0, donc par passage à la limite, on obtient $f(0)=0$: contradiction.
Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) \neq 0$ donc $\boxed{f>0}$.
   (b) *Par définition, $g = \ln f$. En passant au $\ln$ dans $(*)$, on obtient :*
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x+y)+g(x-y) = 2g(x)+2g(y) \qquad (\spadesuit)$$
En intégrant x entre 0 et 1, on obtient :
$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\ \int_0^1 g(x+y)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x-y)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x + 2g(y)}$$
c'est-à-dire
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \int_y^{y+1} g + \int_{-y}^{1-y} g = 2\int_0^1 g + 2g(y)$$

donc

$$g : y \mapsto \frac{1}{2}\int_y^{y+1} g + \frac{1}{2}\int_{-y}^{1-y} g - \int_0^1 g.$$

Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Considérons G une primitive de g sur $\mathbb{R}$. On sait alors que $G \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'équation précédente se ré-écrit :

$$\boxed{g : y \mapsto \frac{1}{2}\left[G(y+1) - G(y) + G(1-y) - G(-y)\right] - \int_0^1 g} \qquad (\heartsuit).$$

Montrons par récurrence que $g \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On sait que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$ et $\ln \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ donc leur composée $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, $G \in \mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ donc par opération et en utilisant la relation $(\heartsuit)$, on obtient que g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ce qui prouve l'hérédité.
Ainsi, $g \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que $\boxed{g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$.

(c) En dérivant $(\heartsuit)$ par rapport à y, il vient :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{1}{2}\left(g(1+y) - g(1-y) - g(y) + g(-y)\right).$$

Remarquons que

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(0+y)f(0-y) = \Big(\underbrace{f(0)}_{=1} f(y)\Big)^2$$

et f ne s'annule pas, donc

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(-y) = f(y),$$

ce qui prouve que $\boxed{f \text{ est paire, et donc } g \text{ aussi}}$. Ainsi, l'expression de g' se simplifie en

$$\forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = \frac{1}{2}\left(g(1+y) - g(1-y)\right) \qquad (\clubsuit).$$

g étant de classe $\mathscr{C}^\infty$, elle est en particulier deux fois dérivable et

$$\begin{aligned}
\forall y \in \mathbb{R},\ g''(y) &= \frac{1}{2}\left(g'(1+y) + g'(1-y)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(g(2+y) - g(-y) + g(2-y) - g(y)\right) && \textit{grâce à } (\clubsuit) \\
&= \frac{1}{4}\left(g(2+y) + g(2-y) - 2g(y)\right) && \textit{car } g(-y) = g(y) \\
&= \frac{1}{4}\left(2g(2) + 2g(y) - 2g(y)\right) && \textit{grâce à } (\spadesuit) \\
&= \frac{1}{2}g(2).
\end{aligned}$$

Ainsi, g'' est constante sur $\mathbb{R}$ donc on peut trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $g : t \mapsto at^2 + bt + c$. Par unicité de l'écriture d'une fonction comme somme d'une fonction paire et impaire, on a que $t \mapsto bt$ est nulle donc $g : t \mapsto at^2 + c$ donc $f = e^g : t \mapsto e^{at^2+c}$. De plus, dans ce cas, $f(0) = 1$ donc $e^c = 1$ d'où $\boxed{f : t \mapsto e^{at^2} \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$.

3. Si $f(0) = -1$, alors en posant $h = -f$, on voit que h vérifie les mêmes hypothèses que la fonction f de la question 2. donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $h : t \mapsto e^{at^2}$ d'où $\boxed{f : t \mapsto -e^{at^2}}$.

$\boxed{\text{Les solutions de } (*) \text{ sont donc les fonctions } f : t \mapsto Ce^{at^2}, \text{ avec } C \in \{-1, 0, 1\} \text{ et } a \in \mathbb{R}}$.

Exercice 37 (Annales khass II.19)**.**

1. *Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $P = X^{2n} - 1$.*
2. *Soit $r \in \mathbb{R}$. Calculer* $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$.
3. *Calculer, pour $r \in \mathbb{R}$ avec $|r| \neq 1$,* $I(r) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right) \mathrm{d}t$.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} P = X^{2n} - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_{2n}} (X - \omega) &= \boxed{\prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - \underbrace{\exp \frac{2ik\pi}{2n}}_{=:\omega_k}\right)} \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) \\ P &= \boxed{(X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)} \quad (*). \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) &= (1 + 2r + r^2) \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) \\ &= (1+r)^2 \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) \\ &= \begin{cases} (1+r)^2 \dfrac{r^{2n} - 1}{r^2 - 1} = (r^{2n} - 1)\dfrac{r+1}{r-1} & \text{si } r \neq \pm 1 \text{ (qu. précédente)} \\ 0 & \text{si } r = -1 \\ 2^2 \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) & \text{si } r = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Simplifions l'expression dans le cas où $r = 1$.
En dérivant $(*)$, on obtient

$$P' = 2X \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) + (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(2X - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

donc

$$P'(1) = 2\prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) + 0.$$

On a aussi $P' = 2nX^{2n-1}$ *donc* $P'(1) = 2n$. *Par égalité, on en déduit que :*

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1}\left(2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}\right) = n}$$

donc

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) = \begin{cases} (r^{2n}-1)\dfrac{r+1}{r-1} & \textit{si } r \neq \pm 1 \\ 0 & \textit{si } r = -1 \\ 4n & \textit{si } r = 1. \end{cases}}$$

3. *Soit* $r \in \mathbb{R}$ *avec* $|r| \neq 1$. *Alors* $r \neq \pm 1$. *La fonction* $t \mapsto \ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right)$ *est continue sur le segment* $[0, \pi]$ *donc d'après le théorème de convergence des sommes de Riemann, on a*

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2r\cos t + r^2\right) \mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + r^2\right)\mathrm{d}t && \textit{(somme de Riemann)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1 - 2r\cos\frac{k\pi}{n} + r^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}\right) && \textit{d'après 2.} \end{aligned}$$

Distinguons les cas.

- **Cas où** $r \in]-1, 1[$. *Alors* $0 \leq r^2 < 1$ *donc* $r^{2n} \to 0$ *et* $(r^{2n}-1)\dfrac{r+1}{r-1} \to \dfrac{1+r}{1-r} > 0$ *donc par continuité du* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}\right) = 0$, *donc* $I(r) = 0$.

- **Cas où** $r < -1$ **ou** $r > 1$. *Alors* $r^2 < 1$ *donc* $r^{2n} \to +\infty$. *On écrit alors :*

$$\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}\right) = \ln(r^{2n}) + \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{r^{2n}}\right) + \ln\frac{r+1}{r-1}}_{=:u_n} = 2n\ln r + u_n,$$

avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\frac{r+1}{r-1}$. *Ainsi, par opérations :*

$$\frac{\pi}{n}\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\pi\ln r + 0 = I(r).$$

En conclusion :

$$\boxed{I(r) = \begin{cases} 2\pi\ln r & \textit{si } |r| > 1 \\ 0 & \textit{si } |r| < 1 \end{cases}}$$

Exercice 38 (Annales khass II.20)**.** *Soit* $f : x \mapsto x^3 + x$*.*

1. *Vérifier que* f *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *dont la réciproque* g *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$*, impaire et strictement croissante.*
2. *Donner un développement limité de* g *à la précision* $o(x^5)$ *en* 0*.*
3. *Donner un développement asymptotique à trois termes de* g *en* $+\infty$*.*

Correction :

1. $f : x^3+x$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *donc, d'après le TBM,* f *induit une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $f(\mathbb{R}) =]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$*, qui est également strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*.*
   Comme f *est impaire, sa bijection réciproque* g *l'est aussi (exercice classique).*
   De plus, $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et* $f' : x \mapsto 2x+1$ *ne s'annule pas donc* $\boxed{g = f^{-1} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$*.*

2. **Première méthode.** *On a :* $f(x) = x + x^3 + o(x^5)$*. Comme* $g \in \mathscr{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, on sait d'après la formule de Taylor-Young que* g *admet un DL à l'ordre 5 en 0. De plus,* $f(0) = 0$ *donc* $g'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$*, et par imparité de* g*, le DL de* g *à l'ordre 5 en 0 est de la forme :*

$$g(y) = y + ay^3 + by^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5), \qquad \text{avec } (a,b) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$*, on a :*

$$x = g(f(x)) = f(x) + a(f(x)^3 + bf(x)^5 + \underset{x\to 0}{o}(f(x)^5).$$

Or, $f(x) = x+x^3+o(x^5)$*,* $f(x)^2 = x^2+2x^4+o(x^5)$*,* $f(x)^3 = x^3+3x^5+o(x^5)$*,* $f(x)^5 = x^5+o(x^5)$ *et* $\underset{x\to 0}{o}(f(x)^5) = o(x^5)$ *donc en remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient :*

$$x = x + (a+1)x^3 + (3a+b)x^5 + o(x^5).$$

Par unicité du DL à l'ordre 5 en 0 de l'identité, on a $a+1 = 0$ *et* $3a+b = 0$ *donc* $\boxed{a = -1 \text{ et } b = -3a = 3}$*.*
Ainsi,

$$\boxed{g(y) = y - y^3 + 3y^5 + \underset{y\to 0}{o}(y^5)}.$$

Deuxième méthode. $f(x) = x^3 + x$ *donc* $y = g(y)^3 + g(y) = g(y)[g(y)^2+1]$*. Comme* $g(0) = 0$ *et* g *est continue en 0, on a* $g(y)^2 + 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1$ *donc* $g(y) \underset{0}{\sim} y$*, d'où* $g(y) = y + \underset{y\to 0}{o}(y)$*.*
Ainsi,

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y}{g(y)^2+1} = \frac{y}{1(y+o(y))^2} = \frac{y}{1+y^2+o(y^2)} \\ &= y\left(1 - y^2 + o(y^2)\right) \\ &= y - y^3 + o(y^3). \end{aligned}$$

En réinjectant, on obtient :

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y}{g(y)^2+1} = \frac{y}{1+[y-y^3+o(y^4)]^2} \\ &= y \times \frac{1}{1+y^2-2y^4+o(y^4)} \\ &= y\left[1-y^2+2y^4+(y^2)^2+o(y^4)\right] \\ &= y\left[1-y^2+3y^4+o(y^4)\right] \\ g(y) &= \boxed{y-y^3+3y^5+\underset{y\to 0}{o}(y^5)}. \end{aligned}$$

3. *A nouveau :* $f(x) = x^3+x$ *donc* $y = g(y)^3+g(y) = g(y)^3\left[1+\dfrac{1}{g(y)^2}\right]$. *Comme* $\lim_{+\infty} g = +\infty$, *on a* $1+\dfrac{1}{g(y)^2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1$ *donc* $g(y)^3 \underset{+\infty}{\sim} y$, *d'où* $g(y) \underset{+\infty}{\sim} y^{1/3}$ *Ainsi,*

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{y^{1/3}}{\left(1+\dfrac{1}{g(y)^2}\right)^{1/3}} \text{ avec } \frac{1}{g(y)^2} \underset{+\infty}{\sim} y^{-2/3} \\ &= y^{1/3}\left(1+y^{-2/3}+o(y^{-2/3})\right)^{-1/3} \\ &= y^{1/3}\left(1-\frac{1}{3}y^{-2/3}+o(y^{-2/3})\right). \end{aligned}$$

D'où

$$g(y)^2 = y^{2/3}\left(1-\frac{1}{3}y^{-2/3}+o(y^{-2/3})\right)^2 = y^{2/3}\left(1-\frac{2}{3}y^{-2/3}+o(y^{-2/3})\right)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(y)^2} &= y^{-2/3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}y^{-2/3}+o(y^{-2/3})} \\ &= y^{-2/3} \times \left(1+\frac{2}{3}y^{-2/3}+o(y^{-2/3}\right) \end{aligned}$$

donc

$$1+\frac{1}{g(y)^2} = 1+y^{-2/3}+\frac{2}{3}y^{-4/3}+o(y^{-4/3}.$$

En réinjectant, on obtient :

$$\begin{aligned}
g(y) &= y^{1/3}\left(1+\frac{1}{g(y)^2}\right)^{-1/3} \\
&= y^{1/3}\left(1+y^{-2/3}+\frac{2}{3}y^{-4/3}+o(y^{-4/3})\right)^{-1/3} \\
&= y^{1/3}\left[1-\frac{1}{3}\left(y^{-2/3}+\frac{2}{3}y^{-4/3}+o(y^{-4/3})\right)+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}y^{-4/3}+o(y^{-4/3})\right] \\
&= y^{1/3}\left[1-\frac{1}{3}y^{-2/3}+\left(-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}\right)y^{-4/3}+o(y^{-4/3})\right] \\
g(y) &= \boxed{y^{1/3}-\frac{1}{3}y^{-2/3}+\underset{y\to+\infty}{o}(y^{-4/3})}.
\end{aligned}$$

Exercice 39 (Annales khass II.21)**.** *Déterminer :* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln\cos x}+\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{1}{8}x^4+o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln\cos x} &= -\frac{2}{x^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)} \\
&= -\frac{2}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \\
\frac{1}{\ln\cos x} &= \boxed{\frac{2}{x^2}\left(-1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sin^2 x} &= \frac{2}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2} = \frac{2}{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)} \\ &= \frac{2}{x^2}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)} \\ \frac{2}{\sin^2 x} &= \boxed{\frac{2}{x^2}\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2)\right)}.\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\ln\cos x} + \frac{2}{\sin^2 x} = \frac{2}{x^2}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)}_{=1/2} x^2 + o(x^2)\right] = 1 + o(1),$$

donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln\cos x} + \frac{2}{\sin^2 x}\right) = 1}.$$

Exercice 40 (Annales khass II.22)**.** *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{x} \end{array}$.

1. *Justifier brièvement que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que*
$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{x^{n+1}}P_n(x).$$
3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
   (a) $P_n + P_n' = X^n$
   (b) $P_n(0) = (-1)^n n!$
4. *En calculant de deux manières $\int_0^x t^n e^t\,dt$, déterminer les coefficients du polynôme P_n.*

Correction :

1. *f est un quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On a l'initialisation avec $P_0 = 1$ (unitaire et de degré 0).*
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n tel que
$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n(x)x^{-(n+1)}e^x.$$

$f^{(n)}$ étant dérivable, on obtient pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(P_n(x)x^{-(n+1)} + P_n'(x)x^{-(n+1)} - (n+1)P_n(x)x^{-(n+2)}\right)e^x \\ &= \frac{xP_n(x) + xP_n'(x) - (n+1)P_n(x)}{x^{n+2}}e^x \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{n+2}}e^x, \text{ avec } \boxed{P_{n+1} = XP_n + XP_n' - (n+1)P_n}. \end{aligned}$$

$\deg(XP_n) = n+1$, $\deg(XP_n') = n$, $\deg((n+1)P_n) = n$ donc $\deg(P_{n+1}) = n+1$ et son coefficient dominant est celui de XP_n, donc 1 (car P_n est unitaire). On a bien l'hérédité, ce qui conclut la récurrence.

3. (a) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = P_n + P_n'$ et on montre par récurrence sur n que $Q_n = X^n$.*
On a $Q_0 = P_0 = 1 = X^0$ donc l'initialisation.
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q_n = X^n$.
On a $P_{n+1}' = P_n + XP_n' + P_n' + XP_n'' - (n+1)P_n'$ donc

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= P_{n+1} + P_{n+1}' \\ &= (P_n + P_n') + X(P_n + P_n') + X(P_n' + P_n'') - (n+1)(P_n + P_n') \\ &= (X-n)Q_n + XQ_n' \\ &= (X-n)X^n - nX^n \\ &= X^{n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'hérédité, ce qui conclut la récurrence. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n + P_n' = X^n}$.

(b) *Grâce à la formule de récurrence vérifiée par P_n, on trouve :*

$$P_n(0) = -nP_{n-1}(0) = (-1)^2 n(n-1)P_{n_2}(0) = \cdots = (-1)^n n! \underbrace{P_0(0)}_{=1} = (-1)^n n!$$

(ce que l'on peut vérifier proprement par récurrence sur n).

4. *D'une part, d'après la question précédente :*

$$\begin{aligned} \int_0^x t^n e^t \mathrm{d}t &= \int_0^x (P_n(t) + P_n'(t))e^t \mathrm{d}t \\ &= \int_0^x P_n(t)e^t \mathrm{d}t + \int_0^x P_n'(t)e^t \mathrm{d}t && \textit{par linéarité} \\ &= \int_0^x P_n(t)e^t \mathrm{d}t + \Big[P_n(t)e^t\Big]_0^x - \int_0^x P_n(t)e^t \mathrm{d}t && \textit{par IPP} \\ &= P_n(x)e^x - P_n(0)e^0 \\ &= P_n(x)e^x - (-1)^n n! && \textit{question précédente.} \end{aligned}$$

D'autre part, en notant $I_n = \int_0^x t^n e^t \mathrm{d}t$, et grâce à une IPP, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^x t^n e^t \mathrm{d}t = \left[t^n e^t\right]_0^x - \int_0^x n t^{n-1} e^t \mathrm{d}t \\ I_n &= x^n e^x - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

En itérant, on obtient :

$$\begin{aligned} I_n &= x^n e^x - n(x^{n-1}e^x - (n-1)I_{n-2}) \\ &= x^n e^x - nx^{n-1}e^x + n(n-1)x^{n-2}e^x - n(n-1)(n-2)x^{n-3}e^x + \cdots + (-1)^{n-1}n(n-1)\ldots 2xe^x + (-1)^n n! I_0 \\ &\qquad \text{où } I_0 = \int_0^x e^t \mathrm{d}t = e^x - 1 \\ &= \left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \cdots + (-1)^n n!\right] e^x - (-1)^n n!. \end{aligned}$$

Les deux écritures de I_n permettent d'en déduire que :

$$\boxed{P_n = X^n - nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \ldots + (-1)^n n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}}.$$

3 Probabilités

Exercice 41. *Une urne contient 4 boules indiscernables numérotées de 0 à 3. On tire simultanément deux boules, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = \min(X_1, X_2)$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.*

1. *Déterminer Ω, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.*
2. *Soient $i \in [\![0,3]\!]$ et $j \in [\![0,3]\!]$. Déterminer $\mathrm{P}(X = i, Y = j)$.*
3. *En déduire les lois de X et de Y.*
4. *Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$.*

Correction :

1. $\Omega = \{$*parties à 2 éléments de* $[\![0,3]\!]\}$ *(les tirages sont simultanés donc l'ordre ne compte pas). Ainsi,* $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{4}{2} = 6$. *On a* $\boxed{\Omega = \{\{0,1\};\{0,2\};\{0,3\};\{1,2\};\{1,3\},\{2,3\}\}}$ *et* $\boxed{X(\Omega) = \{0,1,2\}}$, $\boxed{Y(\Omega) = \{1,2,3\}}$.
2. *Soient $i \in [\![0,3]\!]$ et $j \in [\![0,3]\!]$. Alors*
   - *Si $i > j$, on a immédiatement $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = 0$.*
   - *Si $i = j$, alors $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \mathrm{P}(X = i, Y = i) = \mathrm{P}(X_1 = i, X_2 = i) = 0$ car le tirage est simultané.*
   - *Si $i < j$, alors $\mathrm{P}(X = i, Y = j) = \mathrm{P}(\{i,j\}) = \dfrac{1}{6}$.*
3. *Pour tout $i \in [\![0,2]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,3]\!]$, grâce à la formule des probabilités totales,*

$$\mathrm{P}(X = i) = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=i+1}^{3} \frac{1}{6} = \frac{3-i}{6}$$

et

$$\mathrm{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{2} \mathrm{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{6} = \frac{j}{6}.$$

Les lois de X et Y sont données par :

$k \in X(\Omega)$	0	1	2	*Total*
$\mathrm{P}(X = k)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

et

$k \in Y(\Omega)$	1	2	3	*Total*
$\mathrm{P}(Y = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	1

4. *On a* $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}}$, $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{7}{3}}$ *et* $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$, $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{27}{6} = 6$, *d'où* $\boxed{\mathbb{V}(X) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}}$ *et* $\boxed{\mathbb{V}(Y) = 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}}$.

Exercice 42 (Annales khass III.2)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice définie par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)).$$

Soit $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note $C = AU$ et $L = U^T A$.

1. *Déterminer les coefficients du vecteur colonne C et du vecteur ligne L. Quel est le rapport avec les variables X et Y ?*

2. *Montrer que X et Y sont indépendantes si, et seulement si, A est de rang 1.*

Correction :

1. *Notons*

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} L_1 \dots L_n \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\forall i \in [\![1, n]\!]}, \quad \underline{C_i =} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \underline{\mathrm{P}(X = i)},$$

car la famille $(\{Y = j\}_{1 \le j \le n})$ est un système complet d'évènements, et

$$\underline{\forall j \in [\![1, n]\!]}, \quad \underline{L_j =} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \underline{\mathrm{P}(Y = j)}.$$

$\boxed{\text{Le vecteur colonne } C \text{ contient la loi de } X \text{ et le vecteur ligne } L \text{ contient la loi de } Y}$.

2.

$$\begin{aligned} X \perp\!\!\!\perp Y &\iff \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \ \mathrm{P}((X = i) \cap (Y = j)) = \mathrm{P}(X = i)\mathrm{P}(Y = j) \\ &\iff A = CL \\ &\iff A = [\mathrm{P}(Y = 1)C \ \ \mathrm{P}(Y = 2)C \ \ \dots \ \ \mathrm{P}(Y = n)C]. \end{aligned}$$

- *<u>Si $X \perp\!\!\!\perp Y$</u> alors $A = [\mathrm{P}(Y = 1)C \ \ \mathrm{P}(Y = 2)C \ \ \dots \ \ \mathrm{P}(Y = n)C]$ donc toutes les colonnes sont proportionnelles au vecteur colonne C. Comme ni C, ni L ne sont nuls, on en déduit que* $\underline{\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{Vect}\,(C) = 1}$. $\boxed{\text{On a l'implication directe}}$.
- *Supposons que $\mathrm{rg}(A) = 1$. On peut alors trouver une colonne non nulle de A, disons la j_0-ème que l'on notera $\mathrm{Col}_{j_0}(A)$, et alors toutes les autres lui sont proportionnelles. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$, avec $\alpha_{j_0} = 1$, tels que :*

$$A = (\alpha_1 \mathrm{Col}_{j_0}(A), \dots, \alpha_n \mathrm{Col}_{j_0}(A)) = \mathrm{Col}_{j_0}(A)(\alpha_1 \dots \alpha_n).$$

Les coefficients de A sont tous positifs donc ceux de C_{j_0} aussi. Pour créer un vecteur contenant une loi de probabilité, il faut que la somme de ses coefficients soit égale à 1. Notons S la somme les coefficients de C_{j_0} (qui est non nulle car les $C_{j_0} \neq 0$ et ses coefficients sont positifs). Alors $S = \mathrm{P}(Y = j_0)$. Posons

$$\widetilde{C} := \frac{1}{S} \mathrm{Col}_{j_0}(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{P}_{(Y=j_0)}(X = 1) \\ \vdots \\ \mathrm{P}_{(Y=j_0)}(X = n) \end{pmatrix}.$$

Alors, on a :

$$A = \widetilde{C} \times \underbrace{S\,(\alpha_1 \dots \alpha_n)}_{=:\widetilde{L}}.$$

Remarquons que les coefficients de $\widetilde{L}$ sont tous positifs et calculons leur somme.
De $A = \widetilde{C} \times \widetilde{L}$, on déduit :

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{C}_j\right)}_{=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{L}_i\right), \text{ donc } \sum_{i=1}^{n} \widetilde{L}_i = 1.$$

Ainsi, le vecteur $\widetilde{L}$ contient une loi de probabilité.
Pour finir, $C = AU = \widetilde{C}\,\underbrace{\widetilde{L}U}_{=1} = \widetilde{C}$ donc $\boxed{C = \widetilde{C}}$ et de même $\boxed{L = U^T A = \widetilde{L}}$.
On a donc : $A = CL$, et d'après l'équivalence, on en déduit que $\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendants, d'où l'implication}}$

Exercice 43 (Annales khass III.3)**.** *Soient k et n deux entiers tels que $1 \leq n \leq k \leq 2n$.*
Une troupe de comédiens donne deux représentations de théâtre pour les $2n$ vacanciers d'un hôtel. Les représentations ont lieu dans une salle de k places.
On suppose que chacun des vacanciers choisit au hasard d'aller à l'une des deux séances. On suppose également que toute personne refusée à la première séance par manque de places se présente à nouveau à la seconde séance.
On note X la variable aléatoire réelle correspondant aux nombre de vacanciers se présentant à la première séance.

1. *Donner la loi de X.*
2. *Soit A l'événement « Toutes les personnes assistent à une représentation ». Calculer $\mathrm{P}(A)$ en fonction de k.*
3. *Démontrer que $\mathrm{P}(A) > \frac{1}{2}$.*

Correction :

1. $\boxed{X \sim \mathscr{B}(2n, \frac{1}{2})}$.
2. $\boxed{A \text{ est l'événement } (X \geq 2n-k)}$. *En effet, on a $0 \leq 2n-k \leq n \leq k$ donc si au moins $2n-k$ personnes se présentent à la première séance, alors il y aura au moins $2n-k$ (car $2n-k \leq k$) personnes qui assisteront à la première séance et il restera moins de k personnes à caser lors de la seconde séance (ce qui est possible, au vu de la jauge).*
   Ainsi,
   $$\boxed{\mathrm{P}(A) = \sum_{j=2n-k}^{2n} \binom{2n}{j} \frac{1}{2^j} \frac{1}{2^{2n-j}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=2n-k}^{2n} \binom{2n}{j}}.$$

3. *Comme $2n-k \leq n \leq 2n$ et que l'on somme des réels positifs, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(A) &\geq \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j} \\
&> \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j}}_{=:S} \qquad \text{car} \quad \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} > 0 \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En effet, grâce à la formule du binôme de Newton et symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$1 = \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{j}}_{=S} + \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + \underbrace{\frac{1}{2^{2n}} \sum_{j=n+1}^{2n} \binom{2n}{j}}_{=S}.$$

Donc

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} + S = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, on a : $\boxed{\mathrm{P}(A) > \frac{1}{2}}$.

Exercice 44 (Annales khass III.4)**.** *On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant chacune n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geq 2$. On tire une boule dans chaque urne et on note X_i le numéro de la boule tirée dans l'urne U_i. On note E_n l'événement « X_1/X_2 est un entier ».*

1. Calculer $\mathrm{P}(E_2)$, $\mathrm{P}(E_3)$.
2. Calculer $\mathrm{P}(E_n)$. Le résultat sera donné sous la forme d'une somme.
3. Montrer, pour tout entier $n \geq 2$, que $\ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n$.
4. Donner la limite de $\mathrm{P}(E_n)$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi qu'un équivalent.

Correction :

1. Si $n = 2$ (resp. $n = 3$) alors $\Omega_2 = [\![1, 2]\!]^2$ (resp. $\Omega_3 = [\![1, 3]\!]^2$), et on le munit de la probabilité uniforme P. Alors :

$$\mathrm{P}(E_2) = \frac{\mathrm{Card}\,((1,1);(2,1);(2,2))}{\mathrm{Card}([\![1,2]\!]^2)} = \boxed{\frac{3}{4}} \text{ et } \mathrm{P}(E_3) = \frac{\mathrm{Card}\,((1,1);(2,1);(3,1);(2,2);(3,3))}{\mathrm{Card}([\![1,3]\!]^2)} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

2. Remarquons que $\{X_2 = k\}_{1 \leq k \leq n}$ est un SCE donc $E_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} \{X_2 = k, X_1 \text{ est un multiple de k}\}$,

puis par additivité de P :

$$\mathrm{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(X_2 = k, X_1 \text{ est un multiple de k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\#\{\text{multiples de k dans } [\![1,n]\!]\}}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor}.$$

3. Soient $n \geq 2$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. La fonction f est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc grâce à la méthode des rectangles, on obtient :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

i.e.

$$\forall k \geq 2,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1).$$

Puis, en sommant pour k variant de 2 à n, et par télescopage, on a :

$$\boxed{\ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln n}.$$

4.

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{n}{k} - 1 < \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{n}{k},$$

donc

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k} - 1\right) \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{k}\right\rfloor \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k},$$

i.e.

$$\underline{\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \mathrm{P}(E_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.}$$

En utilisant la question 3., il vient :

$$\frac{1}{n}[\ln(n+1) - \ln(2)] \leq \mathrm{P}(E_n) \leq \frac{1}{n}[1 + \ln(n)],$$

i.e.

$$\frac{\ln(n)}{n}\underbrace{\left[1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)}{\ln(n)}\right]}_{\to 1} \leq \mathrm{P}(E_n) \leq \frac{\ln(n)}{n}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right)}_{\to 1}.$$

Par encadrement, on obtient : $\boxed{\mathrm{P}(E_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}}$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ et par conservation de la limite dans les équivalents, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{P}(E_n) = 0}$.

Exercice 45 (Annales khass III.5)**.** *La variable aléatoire X est régie par le tirage d'un dé à six faces parfaitement équilibré de sorte que :* $\forall i \in \{1,2,\ldots,6\},\ p_i = \mathrm{P}(X = i) = \dfrac{1}{6}$.
La variable aléatoire Y est régie par le tirage d'un dé à six faces truqué de sorte que :
$\forall j \in \{1,2,\ldots,6\},\ \mathrm{P}(Y = j) = q_j \geq 0,$ *avec* $\sum\limits_{j=1}^{6} q_j = 1.$

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

1. *Étant donné un entier naturel p non nul, montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![1, 6]\!]$ tel que $p = 6q + r$.*
2. *On construit un « dé virtuel » à six faces de la façon suivante : si $X + Y = 6\,q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 2, \ldots, 6\}$, alors $V = r$.*
   Montrer que $\mathrm{P}(V = 1) = \mathrm{P}(V = 2) = \cdots = \mathrm{P}(V = 6) = \dfrac{1}{6}$.

1. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On écrit la division euclidienne de p par 6 : $p = 6q + r$ avec $r \in [\![0, 5]\!]$, $q \in \mathbb{N}$, et unicité d'un tel couple.*
   Si $r \in [\![1, 5]\!]$, alors on a ce que l'on voulait ; si $r = 0$, alors $q \geq 1$ (car p est supposé non nul), et on écrit alors : $p = 6(q - 1) + 6$, ce qui conclut.
2. *On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!] = Y(\Omega)$ donc $(X + Y)(\Omega) = [\![2, 12]\!]$, et $X + Y = 6q + r$ avec $r \in [\![1, 6]\!]$ et $q \in \mathbb{N}$ donc $q \in \{0, 1\}$.*
   On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(V = 1) &= \mathrm{P}(X + Y = 7)\\
\mathrm{P}(V = 2) &= \mathrm{P}(X + Y = 2) + \mathrm{P}(X + Y = 8)\\
\mathrm{P}(V = 3) &= \mathrm{P}(X + Y = 3) + \mathrm{P}(X + Y = 9)\\
\mathrm{P}(V = 4) &= \mathrm{P}(X + Y = 4) + \mathrm{P}(X + Y = 10)\\
\mathrm{P}(V = 5) &= \mathrm{P}(X + Y = 5) + \mathrm{P}(X + Y = 11)\\
\mathrm{P}(V = 6) &= \mathrm{P}(X + Y = 6) + \mathrm{P}(X + Y = 12).
\end{aligned}$$

   Puis :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X + Y = 7) &= \sum_{j=1}^{6} \mathrm{P}(Y = j, X = 7 - j)\\
&= \sum_{j=1}^{6} \mathrm{P}(Y = j)\mathrm{P}(X = 7 - j) && \textit{par indépendance}\\
&= \sum_{j=1}^{6} q_j \frac{1}{6}\\
&= \frac{1}{6} && \textit{car } \sum_{j=1}^{6} q_j = 1.
\end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=2)+\mathrm{P}(X+Y=8) &= \mathrm{P}(X=1,Y=1)+\sum_{j=2}^{6}\mathrm{P}(Y=j,X=8-j)\\ &= \frac{1}{6}q_1+\sum_{j=2}^{6}\frac{1}{6}q_j\\ &= \frac{1}{6}\times\sum_{j=1}^{6}q_j\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X+Y=3)+\mathrm{P}(X+Y=9) &= \sum_{j=1}^{3}\mathrm{P}(Y=j,X=3-j)+\sum_{j=3}^{6}\mathrm{P}(Y=j,X=9-j)\\ &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{3}q_j+\sum_{j=3}^{6}\frac{1}{6}q_j=\frac{1}{6}\times\sum_{j=1}^{6}q_j=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{P}(V=1)=\mathrm{P}(V=2)=\cdots=\mathrm{P}(V=6)=\frac{1}{6}}$.

Exercice 46 (Annales khass III.6)**.** *Soit n un entier naturel tel que $n\geq 2$. On considère n papiers numérotés de 0 à $n-1$. Sur le papier numéro k on écrit le nombre complexe $\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. On place ces papiers dans une urne et on tire un papier au hasard. On note X la partie réelle du complexe obtenu et Y sa partie imaginaire.*

1. *Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.*
2. *Est-il vrai que $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$?*
3. *Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?*

Correction : *Introduisons Z la variable aléatoire correspondant au numéro du papier tiré. Alors $\underline{Z\sim\mathcal{U}([\![0,n-1]\!])}$, $X=\cos(2\pi Z/n)$ et $Y=\sin(2\pi Z/n)$.*

1. *Par théorème de transfert :*

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2\pi k/n)=\frac{1}{n}\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\ \text{ et } E(Y)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2\pi k/n)=\frac{1}{n}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right).$$

Or, $\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=\sum_{z\in\mathbb{U}_n}z=0$ dès que $n\geq 2$, ce qui est le cas ici, donc $\boxed{\mathbb{E}(X)=0=\mathbb{E}(Y)}$, donc X et Y sont centrées.

2. *Par théorème de transfert :*

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2\pi k/n)\sin(2\pi k/n) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(4\pi k/n) = \frac{1}{2n}\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{4i\pi k}{n}}\right).$$

Si $n > 2$*, alors* $e^{\frac{4i\pi}{n}} \neq 1$ *et* $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{1}{2n}\mathrm{Im}\left(\dfrac{1-e^{4i\pi}}{1-e^{\frac{4i\pi}{n}}}\right) = 0$ *; si* $n = 2$*, alors* $Y = 0$ *donc* $E(XY) = 0$*.*
Dans tous les cas, $\boxed{\mathbb{E}(XY) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$*, donc la réponse est* $\boxed{\textit{oui}}$*.*

3. **Indication** *: étudier l'évènement* $\{Y = 0\}$*. Remarquons que*

$$\{Y=0\} = \left\{\sin\left(\frac{2\pi Z}{n}\right) = 0\right\} = \left\{\frac{2\pi Z}{n} \equiv 0 \mod (\pi)\right\} = \left\{\frac{2\pi Z}{n} \in \{0,\pi\}\right\} = \{Z=0\} \sqcup \left\{Z = \frac{n}{2}\right\},$$

où la troisième égalité provient du fait que $0 \leq Z \leq n-1$ *donc que* $0 \leq \frac{2\pi Z}{n} \leq \frac{2\pi(n-1)}{n} < 2\pi$*. Ainsi, la valeur de* $\mathrm{P}(Y=0)$ *dépend de la parité de* n*. Plus précisément, si* n *est impair alors* $\mathrm{P}(Y=0) = \mathrm{P}(Z=0) = \frac{1}{n}$ *; si* n *est pair alors* $\{Y=0\} = \{Z=0\} \sqcup \{Z = \frac{n}{2}\}$ *donc* $\mathrm{P}(Y=0) = \frac{2}{n}$*. Remarquons également que les variables aléatoires* X *et* Y *sont liées par la relation* $X^2 + Y^2 = 1$*. Ainsi,* $\{Y = 0 | X = 1\}$ *est l'évènement certain et* $\mathrm{P}_{\{X=1\}}(Y=0) = 1$*. Ces observations permettent de répondre à la question posée, en distinguant certains cas.*

- *Si* $n = 2$*, alors* $Y = 0$ *(v.a. constante) donc* X *et* Y *sont indépendantes (N.B. : une v.a. constante est indépendante de toute variable aléatoire...).*
- *Si* $n \geq 3$ *impair, alors* $\mathrm{P}_{\{X=1\}}(Y=0) = 1 \neq \frac{1}{n} = \mathrm{P}(Y=0)$ *donc* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*
- *Si* $n \geq 4$ *pair, alors* $\mathrm{P}_{\{X=1\}}(Y=0) = 1 \neq \frac{2}{n} = \mathrm{P}(Y=0)$ *donc* X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*

Ainsi, $\boxed{\textit{les v.a. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes ssi } n = 2}$*.*