

Programme de la colle n° 25 Semaine du 25 au 30 mai 2026

Attention, les questions de cours sont sur la deuxième page

Intégration sur un segment

- Intégration des fonctions en escalier sur un segment : subdivision d'un segment, fonctions en escalier, définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles), interprétation géométrique.
- Intégration des fonctions continues (et continues par morceaux) sur un segment : définition, théorème d'approximation par des fonctions en escalier (la notion de continuité uniforme est hors programme), définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles).
- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive d'une fonction continue et écriture, à l'aide d'une intégrale, de la primitive s'annulant en un point donné.
- Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variables (révisions).
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. Si f est continue un segment, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f .
- Intégrale des fonctions à valeurs complexes continues : définition à l'aide des parties réelles et imaginaires, linéarité, inégalité triangulaire, calcul intégral, formule de Taylor.

Équations différentielles linéaires

- Équations différentielles linéaires : structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition, utilisation de la \mathbb{R} -linéarité des parties réelle et imaginaire.
- Équations différentielles linéaires du premier ordre : résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution par la méthode de la variation de la constante, existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants : équation homogène, polynôme caractéristique, résolution (solutions à valeurs complexes/réelles). Solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ avec $(A, \lambda) \in \mathbb{K}^2$, $x \mapsto B \cos(\omega x)$ et $x \mapsto B \sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Espaces préhilbertiens réels

- Produit scalaire, espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Exemples usuels : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- Norme et distance euclidiennes associées à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire. Identité du parallélogramme, formules de polarisation.
- Orthogonalité. Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales, orthonormales. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore.
- Base orthonormée d'un espace euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel. Propriétés. Sous-espaces orthogonaux. Un sous-espace de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- Projecteur (et symétrie) orthogonal(e) sur un sous-espace de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.
- Distance d'un vecteur à une partie. Cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie : la distance est atteinte en un unique point : le projeté orthogonal.
- Théorème et algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Séries numériques (questions de cours uniquement)

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec éventuellement cas d'égalité).
- Tout espace euclidien admet une base orthonormée.
- Un sous-espace vectoriel de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.
- La convergence absolue implique la convergence.
- Séries de Riemann.
- Théorème des séries alternées (convergence uniquement).