

Programme de la colle n° 25

Semaine du 19 au 24 mai 2025

Probabilité sur un univers fini

- Expérience aléatoire : issue/réalisation, univers, événement, événements élémentaires, événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.
- Probabilité. Définition, propriétés.
Une probabilité est entièrement définie par sa valeur sur les événements élémentaires.
- Probabilité uniforme.
- Probabilités conditionnelles :
 - Formule des probabilités composées ;
 - Formule des probabilité totales ;
 - Formule(s) de Bayes.
- Événements indépendants. Événements mutuellement indépendants.

La notion de variable aléatoire n'a pas été abordée (elle le sera dans un prochain chapitre).

Espaces préhilbertiens réels

- Produit scalaire, espaces préhilbertiens, espaces euclidiens. Exemples usuels : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n , sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- Norme et distance euclidiennes associées à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire. Identité du parallélogramme, formules de polarisation.
- Orthogonalité. Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales, orthonormales. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls. Théorème de Pythagore.
- Base orthonormée d'un espace euclidien. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée. Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel. Propriétés. Sous-espaces orthogonaux. Un sous-espace de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- Projecteur (et symétrie) orthogonal(e) sur un sous-espace de dimension finie. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée.
- Distance d'un vecteur à une partie. Cas d'un sous-espace vectoriel de dimension finie : la distance est atteinte en un unique point : le projeté orthogonal.
- Théorème et algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Caractérisation d'une probabilité par ses valeurs en les événements élémentaires.
- La probabilité conditionnelle à un événement de probabilité non nulle est une probabilité.
- Formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec éventuellement cas d'égalité).
- Tout espace euclidien admet une base orthonormée directe.
- Un sous-espace vectoriel de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.