

Programme de la colle n° 24 Semaine du 18 au 23 mai 2026

Attention, les questions de cours sont au verso.

Probabilité sur un univers fini

- Expérience aléatoire : issue/réalisation, univers, événement, événements élémentaires, événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.
- Probabilité. Définition, propriétés.
Une probabilité est entièrement définie par sa valeur sur les événements élémentaires.
- Probabilité uniforme.
- Probabilités conditionnelles :
 - Formule des probabilités composées ;
 - Formule des probabilité totales ;
 - Formule(s) de Bayes.
- Événements indépendants. Événements mutuellement indépendants.

La notion de variable aléatoire n'a pas été abordée (elle le sera dans un prochain chapitre).

Intégration sur un segment

- Intégration des fonctions en escalier sur un segment : subdivision d'un segment, fonctions en escalier, définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles), interprétation géométrique.
- Intégration des fonctions continues (et continues par morceaux) sur un segment : définition, théorème d'approximation par des fonctions en escalier (la notion de continuité uniforme est hors programme), définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles).
- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive d'une fonction continue et écriture, à l'aide d'une intégrale, de la primitive s'annulant en un point donné.
- Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variables (révisions).
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. Si f est continue un segment, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f .
- Intégrale des fonctions à valeurs complexes continues : définition à l'aide des parties réelles et imaginaires, linéarité, inégalité triangulaire, calcul intégral, formule de Taylor.

Équations différentielles linéaires

Le TD n'a pas été abordé, mais on pourra éventuellement donner une équation différentielle linéaire du premier ordre ou du second ordre à coefficients constants *très simple* à résoudre pour vérifier que les théorèmes et les méthodes de résolution sont bien connus et maîtrisés.

Espaces préhilbertiens réels (questions de cours uniquement)

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment (non trivial) est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Convergence des sommes de Riemann dans le cas où f est lipschitzienne.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz (avec éventuellement cas d'égalité).
- Tout espace euclidien admet une base orthonormée.
- Un sous-espace vectoriel de dimension finie et son orthogonal sont supplémentaires.
- Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.