

Programme de la colle n° 23

Semaine du 5 au 10 mai 2025

Intégration sur un segment

- Intégration des fonctions en escalier sur un segment : subdivision d'un segment, fonctions en escalier, définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles), interprétation géométrique.
- Intégration des fonctions continues (et continues par morceaux) sur un segment : définition, théorème d'approximation par des fonctions en escalier (la notion de continuité uniforme est hors programme), définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles).
- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive d'une fonction continue et écriture, à l'aide d'une intégrale, de la primitive s'annulant en un point donné.
- Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variables (révisions).
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. Si f est continue un segment, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f .
- Intégrale des fonctions à valeurs complexes continues : définition à l'aide des parties réelles et imaginaires, linéarité, inégalité triangulaire, calcul intégral, formule de Taylor.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment (non trivial) est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Inégalité de Taylor-Lagrange.
- Convergence des sommes de Riemann dans le cas où f est lipschitzienne.