Lycée Sainte-Geneviève **2024-2025**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n° 22

Semaine du 28 avril au 3 mai 2025

Représentation matricielle d'une application linéaire

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$ (en ayant fixé un couple de bases).
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la réciproque (dans les bases correspondantes).
- Matrice de changement de base. Définition, propriétés.
  Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice. Théorème du rang matriciel.
- Rang d'une matrice (défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes). Liens entre les notions de rang : d'une matrice, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire.
- Rang d'un système linéaire.

Intégration sur un segment

- Intégration des fonctions en escalier sur un segment : subdivision d'un segment, fonctions en escalier, définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles), interprétation géométrique.
- Intégration des fonctions continues (et continues par morceaux) sur un segment : définition, théorème d'approximation par des fonctions en escalier (la notion de continuité uniforme est hors programme), définition et propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire, relation de Chasles).
- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse : existence d'une primitive d'une fonction continue et écriture, à l'aide d'une intégrale, de la primitive s'annulant en un point donné.
- Techniques d'intégration : intégration par parties, changement de variables (révisions).
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Sommes de Riemann. Si f est continue un segment, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f.
- Intégrale des fonctions à valeurs complexes continues : définition à l'aide des parties réelles et imaginaires, linéarité, inégalité triangulaire, calcul intégral, formule de Taylor.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$.
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la bijection réciproque (dans les bases correspondantes).
- Une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur un segment (non trivial) est nulle.
- Théorème fondamental de l'analyse.
- Formule de Taylor avec reste intégral.

— Inégalité de Taylor-Lagrange.
— Convergence des sommes de Riemann dans le cas où f est lipschitzienne.