Lycée Sainte-Geneviève **2023-2024**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n° 21
Semaine du 22 au 27 avril 2024

Ensembles finis et dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal. Cardinal d'une partie, cas d'égalité.
- Liens entre applications injectives/surjectives entre ensembles (finis) et cardinaux de ces ensembles. En particulier : une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).
- Principe des tiroirs.
- Opérations sur les ensembles finis et cardinaux : union, complémentaire, produit cartésien. (*Formule du crible hors-programme*)
- Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Notion de p-arrangement d'un ensemble. Cardinal de l'ensemble des p-arrangements d'éléments d'un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des applications injectives entre deux ensembles finis.
- Notion de permutation. Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.
- Cardinal de l'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.
- Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal, de la formule de Vandermonde, du binôme de Newton.

Représentation matricielle d'une application linéaire

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$ (en ayant fixé un couple de bases).
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la réciproque (dans les bases correspondantes).
- Matrice de changement de base. Définition, propriétés.
  Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice.
- Rang d'une matrice (défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes). Liens entre les notions de rang : d'une matrice, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire.
- Rang d'un système linéaire.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$.
- Écriture matricielle de $y = f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la bijection réciproque (dans les bases correspondantes).