Programme de la colle n° 21

Semaine du 6 au 11 avril 2026

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension fine peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
  - Existence d'un supplémentaire.
  - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
  - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
  - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
  - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
  - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

Représentation matricielle d'une application linéaire

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$ (en ayant fixé un couple de bases).
- Écriture matricielle de $y=f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la réciproque (dans les bases correspondantes).
- Matrice de changement de base. Définition, propriétés.
  Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Noyau et image d'une matrice. Théorème du rang matriciel.
- Rang d'une matrice (défini comme le rang de la famille de ses vecteurs colonnes). Liens entre les notions de rang : d'une matrice, d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire.
- Rang d'un système linéaire.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).
- Isomorphisme entre $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(E,F)$.
- Écriture matricielle de $y=f(x)$ pour $x \in E, y \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
- Composition d'applications linéaires et produit matriciel.
- La matrice d'une application linéaire f est inversible si et seulement si f est bijective et dans ce cas son inverse est la matrice de la bijection réciproque (dans les bases correspondantes).