Lycée Sainte-Geneviève **2025-2026**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n° 20

Semaine du 30 mars au 4 avril 2026

Attention, ce programme de colle tient sur deux pages.

Ensembles finis et dénombrement

— Ensemble fini : définition, cardinal. Cardinal d'une partie, cas d'égalité.
— Liens entre applications injectives/surjectives entre ensembles (finis) et cardinaux de ces ensembles. En particulier : une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).
— Principe des tiroirs.
— Opérations sur les ensembles finis et cardinaux : union, complémentaire, produit cartésien. (*Formule du crible hors-programme*)
— Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.
— Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
— Notion de p-arrangement d'un ensemble. Cardinal de l'ensemble des p-arrangements d'éléments d'un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des applications injectives entre deux ensembles finis.
— Notion de permutation. Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.
— Cardinal de l'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.
— Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal, de la formule de Vandermonde, des formules du « capitaine » et du « sélectionneur », du binôme de Newton.

Analyse asymptotique

— Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point a de $\bar{\mathbb{R}}$.
— Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O.

Développements limités

— Définition, partie régulière, unicité, troncature.
— Propriété des développements limités des fonctions paires et impaires.
— Développement limité et continuité : f possède un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue (ou prolongeable par continuité) en a.
— Développement limité et dérivabilité : f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a.
— Primitivation d'un développement limité.
— Formule de Taylor-Young.
— Développements limités usuels en 0 : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, ch, sh, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan et tan (à l'ordre 3).
— Opérations sur les développements limités : addition, multiplication par un scalaire, produit, composition (substitution), inverse à l'aide de la composition par $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$.
— Applications : au calcul de limites, à la recherche d'équivalents, à la recherche d'asymptotes, à l'étude de positions relatives tangente/courbe et asymptote/courbe.

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $n+1$ est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension fine peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
  - Existence d'un supplémentaire.
  - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
  - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
  - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
  - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
  - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).