

## Programme de la colle n° 20 Semaine du 30 mars au 5 avril 2025

### Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de cardinal  $n + 1$  est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
  - Existence d'un supplémentaire.
  - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
  - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
  - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
  - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
  - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

### Analyse asymptotique

- Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence en un point  $a$  de  $\bar{\mathbb{R}}$ .
- Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles  $o$  et  $O$ .

### Développements limités

- Définition, partie régulière, unicité, troncature.
- Propriété des développements limités des fonctions paires et impaires.
- Développement limité et continuité :  $f$  possède un développement limité à l'ordre 0 en  $a$  si et seulement si  $f$  est continue (ou prolongeable par continuité) en  $a$ .
- Développement limité et dérivabilité :  $f$  possède un développement limité à l'ordre 1 en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$ .
- Primitivation d'un développement limité.
- Formule de Taylor-Young.
- Développements limités usuels en 0 :  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $\operatorname{Arctan}$  et  $\tan$  (à l'ordre 3).
- Opérations sur les développements limités : addition, multiplication par un scalaire, produit, composition (substitution), inverse à l'aide de la composition par  $u \mapsto \frac{1}{1+u}$ .
- Applications : au calcul de limites, à la recherche d'équivalents, à la recherche d'asymptotes, à l'étude de positions relatives tangente/courbe et asymptote/courbe.

### Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).