

Programme de la colle n° 19 Semaine du 24 au 29 mars 2025

Ensembles finis et dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal. Cardinal d'une partie, cas d'égalité.
- Liens entre applications injectives/surjectives entre ensembles (finis) et cardinaux de ces ensembles. En particulier : une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).
- Principe des tiroirs.
- Opérations sur les ensembles finis et cardinaux : union, complémentaire, produit cartésien. (*Formule du crible hors-programme*)
- Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Notion de p -arrangement d'un ensemble. Cardinal de l'ensemble des p -arrangements d'éléments d'un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des applications injectives entre deux ensembles finis.
- Notion de permutation. Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.
- Cardinal de l'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n .
- Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal, de la formule de Vandermonde, des formules du « capitaine » et du « sélectionneur », du binôme de Newton.

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $n + 1$ est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
 - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
 - Existence d'un supplémentaire.
 - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
 - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
 - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
 - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
 - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).