

Programme de la colle n° 19

Semaine du 23 au 28 mars 2026

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Révision

Convexité

- Fonction convexe/concave.
 - Interprétation graphique. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes, par rapport à ses sécantes.
 - Inégalité des pentes.
 - Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
 - Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
- L'inégalité de Jensen est hors-programme mais a été vue en TD.*

Ensembles finis et dénombrement

- Ensemble fini : définition, cardinal. Cardinal d'une partie, cas d'égalité.
- Liens entre applications injectives/surjectives entre ensembles (finis) et cardinaux de ces ensembles. En particulier : une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).
- Principe des tiroirs.
- Opérations sur les ensembles finis et cardinaux : union, complémentaire, produit cartésien. (*Formule du crible hors-programme*)
- Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.
- Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
- Notion de p -arrangement d'un ensemble. Cardinal de l'ensemble des p -arrangements d'éléments d'un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des applications injectives entre deux ensembles finis.
- Notion de permutation. Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.
- Cardinal de l'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n .
- Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal, de la formule de Vandermonde, des formules du « capitaine » et du « sélectionneur », du binôme de Newton.

Développements limités

- Définition, partie régulière, unicité, troncature.
- Propriété des développements limités des fonctions paires et impaires.
- Développement limité et continuité : f possède un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue (ou prolongeable par continuité) en a .
- Développement limité et dérivabilité : f possède un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a .
- Primitivation d'un développement limité.
- Formule de Taylor-Young.
- Développements limités usuels en 0 : $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, \exp , \sin , \cos , ch , sh , $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, Arctan et \tan (à l'ordre 5).
- Opérations sur les développements limités : addition, multiplication par un scalaire, produit, composition (substitution), inverse à l'aide de la composition par $u \mapsto \frac{1}{1+u}$.
- Applications : au calcul de limites, à la recherche d'équivalents, à la recherche d'asymptotes, à l'étude de positions relatives tangente/courbe et asymptote/courbe.

Questions de cours

Cette semaine, la question de cours est remplacée par un calcul «simple» de développement limité permettant de s'assurer que les développements limités usuels sont connus et les techniques de calcul (somme, produit, composition/substitution, quotient) sont maîtrisées.