

Programme de la colle n° 18 Semaine du 18 au 23 mars 2024

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

- Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Caractérisation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.
- La dérivabilité implique la continuité.
- Dérivabilité à gauche, à droite.
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point/sur un intervalle : addition, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition.
- Théorème de dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction bijective strictement monotone.
- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
- Inégalité des accroissements finis, interprétation cinématique ; fonctions lipschitziennes, contractantes ; application à l'étude de suites récurrentes.
- Monotonie et dérivabilité.
- Théorème de la limite de la dérivée (finie ou infinie).
- Dérivées d'ordre supérieur : fonctions n fois dérivables, de classe \mathcal{C}^n , de classe \mathcal{C}^∞ ; addition, multiplication par un scalaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque de fonctions n fois dérivables.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes : définition, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires ; théorèmes d'opérations. Le théorème de Rolle ne s'étend pas ; inégalité des accroissements finis.

Convexité

- Fonction convexe/concave.
 - Interprétation graphique. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes, par rapport à ses sécantes.
 - Inégalité des pentes.
 - Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
 - Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.
- L'inégalité de Jensen est hors-programme mais a été vue en TD.*

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivée n -ième d'un produit (formule de Leibniz).
- Inégalité des pentes.