Lycée Sainte-Geneviève **2024-2025**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n^o 18

Semaine du 17 au 22 mars 2025

À l'attention des colleurs : après la question de cours, on commencera par poser un exercice d'analyse, puis, s'il reste du temps, un exercice de dénombrement.

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

— Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Caractérisation à l'aide d'un d'un développement limité à l'ordre 1.
— La dérivabilité implique la continuité.
— Dérivabilité à gauche, à droite.
— Opérations sur les fonctions dérivables en un point/sur un intervalle : addition, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition.
— Théorème de dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction bijective strictement monotone.
— Dérivée et extremum local en un point intérieur.
— Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
— Inégalité des accroissements finis, interprétation cinématique ; fonctions lipschitziennes, contractantes ; application à l'étude de suites récurrentes.
— Monotonie et dérivabilité.
— Théorème de la limite de la dérivée (finie ou infinie).
— Dérivées d'ordre supérieur : fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$; addition, multiplication par un scalaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque de fonctions n fois dérivables.
— Extension aux fonctions à valeurs complexes : définition, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires ; théorèmes d'opérations. Le théorème de Rolle ne s'étend pas ; inégalité des accroissements finis.

Convexité

— Fonction convexe/concave.
— Interprétation graphique. Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses cordes, par rapport à ses sécantes.
— Inégalité des pentes.
— Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.
— Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

L'inégalité de Jensen est hors-programme mais a été vue en TD.

Ensembles finis et dénombrement

— Ensemble fini : définition, cardinal. Cardinal d'une partie, cas d'égalité.
— Liens entre applications injectives/surjectives entre ensembles (finis) et cardinaux de ces ensembles. En particulier : une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective (resp. surjective).
— Principe des tiroirs.
— Opérations sur les ensembles finis et cardinaux : union, complémentaire, produit cartésien. (*Formule du crible hors-programme*)
— Cardinal de l'ensemble des applications entre deux ensembles finis.
— Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.
— Notion de p-arrangement d'un ensemble. Cardinal de l'ensemble des p-arrangements d'éléments d'un ensemble fini. Cardinal de l'ensemble des applications injectives entre deux ensembles finis.
— Notion de permutation. Cardinal de l'ensemble des permutations d'un ensemble fini.
— Cardinal de l'ensemble des parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.
— Démonstrations combinatoires de la formule de Pascal, de la formule de Vandermonde, des formules du « capitaine » et du « sélectionneur », du binôme de Newton.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).
- Inégalité des pentes.