

Programme de la colle n° 17

Semaine du 16 au 21 février 2026

Polynômes

- Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Opérations : somme, produit, composée. Degré.
- Divisibilité. Division euclidienne.
- Racines : évaluation, fonction polynomiale associée à un polynôme ; racine ; ordre de multiplicité d'une racine.
- Dérivation : polynôme dérivé ; linéarité, dérivation d'un produit ; polynômes dérivés d'ordre supérieur ; formule de Taylor ; caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Factorisation : polynôme irréductible ; théorème de D'Alembert-Gauss (admis) ; description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; factorisation en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Relations coefficients-racines : polynôme scindé ; somme et produit des racines (*les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors-programme.*)
- Fonctions rationnelles. Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples. (Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou de degré 2 la forme cherchée doit être fournie.)

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

- Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Caractérisation à l'aide d'un d'un développement limité à l'ordre 1.
- La dérivabilité implique la continuité.
- Dérivabilité à gauche, à droite.
- Opérations sur les fonctions dérivables en un point/sur un intervalle : addition, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition.
- Théorème de dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction bijective strictement monotone.
- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
- Inégalité des accroissements finis, interprétation cinématique ; fonctions lipschitziennes, contractantes ; application à l'étude de suites récurrentes.
- Monotonie et dérivabilité.
- Théorème de la limite de la dérivée (finie ou infinie).
- Dérivées d'ordre supérieur : fonctions n fois dérivables, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$; addition, multiplication par un scalaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque de fonctions n fois dérivables.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes : définition, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires ; théorèmes d'opérations. Le théorème de Rolle ne s'étend pas ; inégalité des accroissements finis.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivée n -ième d'un produit (formule de Leibniz).