

Programme de la colle n° 17 Semaine du 11 au 16 mars 2024

Attention, ce programme de colle tient sur deux pages.

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $n + 1$ est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
 - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
 - Existence d'un supplémentaire.
 - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
 - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
 - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
 - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
 - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

Dérivation des fonctions à valeurs réelles

- Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Caractérisation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.
 - La dérivabilité implique la continuité.
 - Dérivabilité à gauche, à droite.
 - Opérations sur les fonctions dérivables en un point/sur un intervalle : addition, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition.
 - Théorème de dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction bijective strictement monotone.
 - Dérivée et extremum local en un point intérieur.
 - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
 - Inégalité des accroissements finis, interprétation cinématique ; fonctions lipschitziennes, contractantes ; application à l'étude de suites récurrentes.
 - Monotonie et dérivabilité.
 - Théorème de la limite de la dérivée (finie ou infinie).
 - Dérivées d'ordre supérieur : fonctions n fois dérivables, de classe \mathcal{C}^n , de classe \mathcal{C}^∞ ; addition, multiplication par un scalaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque de fonctions n fois dérivables.
 - Extension aux fonctions à valeurs complexes : définition, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires ; théorèmes d'opérations. Le théorème de Rolle ne s'étend pas ; inégalité des accroissements finis.
-

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivée n -ième d'un produit (formule de Leibniz).