

## Programme de la colle n° 17 Semaine du 11 au 16 mars 2024

*Attention, ce programme de colle tient sur deux pages.*

### Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de cardinal  $n + 1$  est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
  - Existence d'un supplémentaire.
  - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
  - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
  - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
  - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
  - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

### Dérivation des fonctions à valeurs réelles

- Dérivabilité en un point, interprétation géométrique. Caractérisation à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1.
  - La dérivabilité implique la continuité.
  - Dérivabilité à gauche, à droite.
  - Opérations sur les fonctions dérivables en un point/sur un intervalle : addition, multiplication par un scalaire, produit, quotient, composition.
  - Théorème de dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction bijective strictement monotone.
  - Dérivée et extremum local en un point intérieur.
  - Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique.
  - Inégalité des accroissements finis, interprétation cinématique ; fonctions lipschitziennes, contractantes ; application à l'étude de suites récurrentes.
  - Monotonie et dérivabilité.
  - Théorème de la limite de la dérivée (finie ou infinie).
  - Dérivées d'ordre supérieur : fonctions  $n$  fois dérivables, de classe  $\mathcal{C}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  ; addition, multiplication par un scalaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque de fonctions  $n$  fois dérivables.
  - Extension aux fonctions à valeurs complexes : définition, caractérisation à l'aide des parties réelles et imaginaires ; théorèmes d'opérations. Le théorème de Rolle ne s'étend pas ; inégalité des accroissements finis.
-

## Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- Théorème de la limite de la dérivée.
- Dérivée  $n$ -ième d'un produit (formule de Leibniz).