Programme de la colle n^o 16
Semaine du 10 au 15 février 2025

Arithmétique

- Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne.
- PGCD et PPCM. Algorithme d'Euclide.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

La relation et le théorème de Bézout ainsi que le lemme de Gauss ne sont pas explicitement au programme mais ont été vus. La notion de congruence n'est pas au programme.

Polynômes

- Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Opérations : somme, produit, composée. Degré.
- Divisibilité. Division euclidienne.
- Racines : évaluation, fonction polynomiale associée à un polynôme ; racine ; ordre de multiplicité d'une racine.
- Dérivation : polynôme dérivé ; linéarité, dérivation d'un produit ; polynômes dérivés d'ordre supérieur ; formule de Taylor ; caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Factorisation : polynôme irréductible ; théorème de D'Alembert-Gauss (admis) ; description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; factorisation en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Relations coefficients-racines : polynôme scindé ; somme et produit des racines (*les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors-programme.*)
- Fonctions rationnelles. Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples. (Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou de degré 2 la forme cherchée doit être fournie.)

Dérivation

Questions de cours uniquement.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.
- Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$).
- Dérivée et extremum local en un point intérieur.
- Théorème de Rolle.
- Théorème des accroissements finis.
- Lien entre signe de la dérivée et monotonie.
- ~~Théorème de la limite de la dérivée.~~