

Programme de la colle n° 16

Semaine du 4 au 9 mars 2024

Polynômes

- Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Opérations : somme, produit, composée. Degré.
- Divisibilité. Division euclidienne.
- Racines : évaluation, fonction polynomiale associée à un polynôme ; racine ; ordre de multiplicité d'une racine.
- Dérivation : polynôme dérivé ; linéarité, dérivation d'un produit ; polynômes dérivés d'ordre supérieur ; formule de Taylor ; caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Factorisation : polynôme irréductible ; théorème de D'Alembert-Gauss (admis) ; description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; factorisation en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Relations coefficients-racines : polynôme scindé ; somme et produit des racines (*les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors-programme.*)
- Fonctions rationnelles. Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples. (Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou de degré 2 la forme cherchée doit être fournie.)

Espaces vectoriels de dimension finie

- Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de cardinal $n + 1$ est liée.
- Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base, à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice. Algorithme de complétion d'une famille libre en une base à l'aide d'une famille génératrice.
- Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice, on peut extraire une base.
- Dimension : définition, propriétés concernant le cardinal d'une famille génératrice, d'une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Dimension finie et isomorphisme.
- Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie.
 - Propriétés (dimension, cas d'égalité).
 - Existence d'un supplémentaire.
 - Formule de Grassmann (dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels).
 - Caractérisations de la supplémentarité deux sous-espaces.
- Rang d'une famille de vecteurs. Caractérisation des familles finies libres par le rang.
- Rang d'une application linéaire.
 - Application linéaire de rang fini, définition du rang.
 - Rang d'une composée. Invariance du rang par composition (à droite ou à gauche) par un isomorphisme.
 - Théorème du rang. Lien entre le rang, l'injectivité, la surjectivité d'une application linéaire.
- Hyperplans. Dimension, équation(s) d'un hyperplan.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).