

Programme de la colle n° 15

Semaine du 5 au 10 février 2024

Polynômes

- Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Opérations : somme, produit, composée. Degré.
- Divisibilité. Division euclidienne.
- Racines : évaluation, fonction polynomiale associée à un polynôme ; racine ; ordre de multiplicité d'une racine.
- Dérivation : polynôme dérivé ; linéarité, dérivation d'un produit ; polynômes dérivés d'ordre supérieur ; formule de Taylor ; caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Factorisation : polynôme irréductible ; théorème de D'Alembert-Gauss (admis) ; description des irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$; factorisation en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
- Relations coefficients-racines : polynôme scindé ; somme et produit des racines (*les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors-programme.*)
- Fonctions rationnelles. Décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle à pôles simples. (Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou de degré 2 la forme cherchée doit être fournie.)

Espaces vectoriels de dimension finie

Questions de cours uniquement

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.
- Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$).
- Théorème de la base incomplète.
- Existence d'un supplémentaire pour un sous espace-vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie (avec la proposition qui précède).
- Théorème de la base adaptée.
- Formule de Grassmann.
- Théorème du rang (avec le lemme qui précède).