

Programme de la colle n° 15

Semaine du 2 au 7 février 2025

Continuité

- Continuité en un point. Continuité sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
- Prolongement par continuité.
- Opérations sur les fonctions continues en un point/sur un intervalle.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. (L'image d'un segment par une fonction continue est un segment).
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et sa réciproque est continue, strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de variation que f .
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Opérations.

Arithmétique

- Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne.
- PGCD et PPCM. Algorithme d'Euclide.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

La relation et le théorème de Bézout ainsi que le lemme de Gauss ne sont pas explicitement au programme mais ont été vus. La notion de congruence n'est pas au programme.

Polynômes

Questions de cours uniquement.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Existence d'une décomposition en facteurs premiers.
- Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Formule de Taylor dans $\mathbb{K}[X]$.
- Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine à l'aide des polynômes dérivés.
- Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (resp. $\mathbb{R}[X]$).