

Programme de la colle n° 14

Semaine du 26 au 31 janvier 2026

Le TD sur l'arithmétique n'ayant pas encore été traité, les exercices de la colle porteront essentiellement sur l'analyse.

Limite d'une fonction de la variable réelle à valeurs réelles

- Notion de voisinage, de point intérieur.
- Limite finie ou infinie d'une fonction en un point d'un intervalle ou en l'une de ses bornes (éventuellement infinie).
- Unicité de la limite.
- Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .
- Limite à gauche, à droite.
- Opérations sur les limites.
- Caractérisation séquentielle d'une limite.
- Limites et relation d'ordre.
- Théorèmes d'encadrement et de comparaison.
- Théorème de la limite monotone. Existence d'une limite finie à gauche et à droite en tout point intérieur d'un intervalle.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Opérations.

Continuité

- Continuité en un point. Continuité sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
- Prolongement par continuité.
- Opérations sur les fonctions continues en un point/sur un intervalle.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. (L'image d'un segment par une fonction continue est un segment).
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et sa réciproque est continue, strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de variation que f .
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Opérations.

Arithmétique (Questions de cours uniquement)

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Caractérisation séquentielle d'une limite.
- Théorème de la limite monotone : si f est monotone sur $]a, b[$ alors f admet une limite en a et en b .
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème de la division euclidienne.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Existence d'une décomposition en facteurs premiers.