

## Programme de la colle n° 12 Semaine du 16 au 21 janvier 2023

### Espaces vectoriels

Voir programme précédent

### Applications linéaires

- Définitions, propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires (combinaisons linéaires, composition, formule du binôme pour deux endomorphismes  $f$  et  $g$  qui commutent).
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- Isomorphisme, groupe linéaire.
- Homothéties, projecteurs et symétries. Caractérisations.
- Lien entre familles de vecteurs et applications linéaires :
  - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire  $f$  est génératrice de l'image de  $f$ .
  - Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une/toute base en une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.
- Formes linéaires et hyperplans.
- Équations linéaires. Structure de l'ensemble des solutions.

### Arithmétique

- Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne.
- PGCD et PPCM. Algorithme d'Euclide.
- Nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers.

*La relation et le théorème de Bézout ainsi que le lemme de Gauss ne sont pas explicitement au programme mais ont été vus. La notion de congruence n'est pas au programme.*

---

### Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Tout vecteur d'un espace vectoriel muni d'une base s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.
- L'image (resp. l'image réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image.
- Caractérisation des projecteurs (resp. des symétries).
- Théorème de la division euclidienne.
- L'ensemble des nombres premiers est infini.
- Existence d'une décomposition en facteurs premiers.