

Programme de la colle n° 12 Semaine du 15 au 20 janvier 2024

Attention : questions de cours en page 2

Applications linéaires

- Définitions, propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires (combinaisons linéaires, composition, formule du binôme pour deux endomorphismes f et g qui commutent).
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
- Isomorphisme, groupe linéaire.
- Homothéties, projecteurs et symétries. Caractérisations.
- Lien entre familles de vecteurs et applications linéaires :
 - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire f est génératrice de l'image de f .
 - Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une/toute base en une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.
- Formes linéaires et hyperplans.
- Équations linéaires. Structure de l'ensemble des solutions.

Limite d'une fonction de la variable réelle à valeurs réelles

- Notion de voisinage, de point intérieur.
- Limite finie ou infinie d'une fonction en un point d'un intervalle ou en l'une de ses bornes (éventuellement infinie).
- Unicité de la limite.
- Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a .
- Limite à gauche, à droite.
- Opérations sur les limites.
- Caractérisation séquentielle d'une limite.
- Limites et relation d'ordre.
- Théorèmes d'encadrement et de comparaison.
- Théorème de la limite monotone. Existence d'une limite finie à gauche et à droite en tout point intérieur d'un intervalle.
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Opérations.

Continuité

- Continuité en un point. Continuité sur un intervalle. Continuité à gauche, à droite.
- Prolongement par continuité.
- Opérations sur les fonctions continues en un point/sur un intervalle.
- Caractérisation séquentielle de la continuité.
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- Théorème des bornes atteintes : une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. (L'image d'un segment par une fonction continue est un segment).
- Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et sa réciproque est continue, strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, de même sens de variation que f .
- Brève extension aux fonctions à valeurs complexes. Caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire. Opérations.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- L'image (resp. l'image réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image.
- Caractérisation des projecteurs (resp. des symétries).
- Caractérisation séquentielle d'une limite.
- Théorème de la limite monotone : si f est monotone sur $]a, b[$ alors f admet une limite en a et en b .
- Théorème des valeurs intermédiaires.
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.