

Programme de la colle n° 12

Semaine du 12 au 17 janvier 2026

Espaces vectoriels

Voir programme précédent.

Applications linéaires

- Définitions, propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires (combinaisons linéaires, composition, formule du binôme pour deux endomorphismes f et g qui commutent).
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
- Isomorphisme, groupe linéaire.
- Homothéties, projecteurs et symétries. Caractérisations.
- Lien entre familles de vecteurs et applications linéaires :
 - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire f est génératrice de l'image de f .
 - Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une/toute base en une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.
- Formes linéaires et hyperplans.
- Équations linéaires. Structure de l'ensemble des solutions.

Primitives et calcul intégral

- Primitive : définition, primitives usuelles.
- Savoir reconnaître des dérivées de fonctions composées (du type $u'f(u)$).
- Calcul de primitives des fonctions : $t \mapsto \frac{1}{at^2 + bt + c}$, $t \mapsto e^{at} \cos(bt)$ et $t \mapsto e^{at} \sin(bt)$.
- Théorème fondamental de l'analyse : existence et écriture sous forme intégrale d'une primitive d'une fonction continue sur un intervalle. (Résultat provisoirement admis).
- Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Formules d'intégration par parties et de changement de variable. Application au calcul de primitives.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Tout vecteur d'un espace vectoriel muni d'une base s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.
- L'image (resp. l'image réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image.
- Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application par l'image d'une base.
- Caractérisation des projecteurs (resp. des symétries).
- Noyau, image et nullité d'une composée d'applications linéaires.
- *On pourra éventuellement remplacer la question de cours par un calcul d'intégrale ou de primitive.*