

Programme de la colle n° 11

Semaine du 6 au 11 janvier 2025

Espaces vectoriels

- Définition. Exemples fondamentaux : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^Ω , (cas particuliers \mathbb{K}^Ω et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).
- Combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel. Caractérisation. Intersection, somme, somme directe (caractérisations). Supplémentaire. Sous-espace engendré par une partie (défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette partie), propriétés, caractérisation, cas particulier d'une partie finie. Sous-espace vectoriel engendré d'une famille finie de vecteurs.
- Familles génératrices, propriétés.
- Familles libres, liées. Indépendance linéaire. Propriétés.
- Bases. Unicité de l'écriture. Coordonnées dans une base.
- Bases canoniques de \mathbb{K}^n et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Conformément au programme de PCSI, toutes les familles de vecteurs considérées sont finies.

Applications linéaires

- Définitions, propriétés.
- Opérations sur les applications linéaires (combinaisons linéaires, composition, formule du binôme pour deux endomorphismes f et g qui commutent).
- Noyau et image d'une application linéaire.
- Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.
- Isomorphisme, groupe linéaire.
- Homothéties, projecteurs et symétries. Caractérisations.
- Lien entre familles de vecteurs et applications linéaires :
 - L'image d'une famille génératrice par une application linéaire f est génératrice de l'image de f .
 - Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme une/toute base en une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.
- Formes linéaires et hyperplans.
- Équations linéaires. Structure de l'ensemble des solutions.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant.
- Caractérisations de la notion de somme directe.
- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Tout vecteur d'un espace vectoriel muni d'une base s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base.
- L'image (resp. l'image réciproque) d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
- Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.
- La réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- L'image d'une famille génératrice par une application linéaire est génératrice de l'image.
- Caractérisation de l'injectivité/surjectivité d'une application par l'image d'une base.
- Caractérisation des projecteurs (resp. des symétries).