

Programme de la colle n° 10

Semaine du 11 au 16 décembre 2023

Suites

- Définitions et caractérisations : constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, monotone ; suite extraite.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes d'ordre 2 (à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
- Suites convergentes.
 - Unicité de la limite.
 - Toute suite convergente est bornée.
 - Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
- Limites infinies.
- Opérations sur les limites (addition, multiplication par un scalaire, produit, inverse, composition par une fonction) et compatibilité avec la relation d'ordre.
- Limite de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Théorème(s) de la limite monotone.
- Théorème de convergence par encadrement (« des gendarmes »). Théorèmes de comparaison.
- Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes.
- Exemples d'étude de suites récurrentes. Représentation géométrique. Étude de la monotonie.
- Brève extension aux suites à valeurs complexes : parties réelle et imaginaire, conjuguée et module d'une suite complexe ; suite bornée ; limite d'une suite complexe, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; toute suite convergente est bornée ; opérations sur les limites de suites convergentes.
- Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence, domination. Caractérisation à l'aide du quotient pour les suites non nulles à partir d'un certain rang. Propriétés, opérations.
Comparaison des suites de références : $(n^\alpha)_n$, $(a^n)_n$, $((\ln n)^\beta)_n$ et $(n!)_n$.
Aucun équivalent usuel n'a été vu à ce stade l'année.

Espaces vectoriels (début)

- Définition. Exemples fondamentaux : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^Ω , (cas particuliers \mathbb{K}^Ω et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$).
- Combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel. Caractérisation. Intersection, somme, somme directe (caractérisations). Supplémentaire. Sous-espace engendré par une partie (défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette partie), propriétés, caractérisation, cas particulier d'une partie finie. Sous-espace vectoriel engendré d'une famille finie de vecteurs.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème des suites adjacentes.
- L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant.
- Caractérisations de la notion de somme directe.