

## Programme de la colle n° 10

Semaine du 11 au 16 décembre 2023

### Suites

- Définitions et caractérisations : constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, monotone ; suite extraite.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes d'ordre 2 (à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).
- Suites convergentes.
  - Unicité de la limite.
  - Toute suite convergente est bornée.
  - Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
- Limites infinies.
- Opérations sur les limites (addition, multiplication par un scalaire, produit, inverse, composition par une fonction) et compatibilité avec la relation d'ordre.
- Limite de  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- Théorème(s) de la limite monotone.
- Théorème de convergence par encadrement (« des gendarmes »). Théorèmes de comparaison.
- Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes.
- Exemples d'étude de suites récurrentes. Représentation géométrique. Étude de la monotonie.
- Brève extension aux suites à valeurs complexes : parties réelle et imaginaire, conjuguée et module d'une suite complexe ; suite bornée ; limite d'une suite complexe, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; toute suite convergente est bornée ; opérations sur les limites de suites convergentes.
- Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence, domination. Caractérisation à l'aide du quotient pour les suites non nulles à partir d'un certain rang. Propriétés, opérations. Comparaison des suites de références :  $(n^\alpha)_n$ ,  $(a^n)_n$ ,  $((\ln n)^\beta)_n$  et  $(n!)_n$ .  
*Aucun équivalent usuel n'a été vu à ce stade l'année.*

### Espaces vectoriels (début)

- Définition. Exemples fondamentaux :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $E^\Omega$ , (cas particuliers  $\mathbb{K}^\Omega$  et  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ).
- Combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel. Caractérisation. Intersection, somme, somme directe (caractérisations). Supplémentaire. Sous-espace engendré par une partie (défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette partie), propriétés, caractérisation, cas particulier d'une partie finie. Sous-espace vectoriel engendré d'une famille finie de vecteurs.

---

### Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Théorème des gendarmes.
- Théorème des suites adjacentes.
- L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant.
- Caractérisations de la notion de somme directe.