

Programme de la colle n° 10

Semaine du 8 au 13 décembre 2025

Le thème principal de la colle est le chapitre «Suites». S'il reste du temps après la question de cours et un exercice sur les suites, on pourra éventuellement poser un petit exercice simple sur les espaces vectoriels (aucun exercice de TD sur ce chapitre n'a pour l'instant été corrigé).

Suites

- Définitions et caractérisations : constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, monotone ; suite extraite.
 - Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes d'ordre 2 (à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).
 - Suites convergentes. Unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
 - Limites infinies.
 - Opérations sur les limites (addition, multiplication par un scalaire, produit, inverse, composition par une fonction) et compatibilité avec la relation d'ordre.
 - Limite de $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Théorème(s) de la limite monotone.
 - Théorème de convergence par encadrement (« des gendarmes »). Théorèmes de comparaison.
 - Suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes.
 - Exemples d'étude de suites récurrentes. Représentation géométrique. Étude de la monotonie.
 - Brève extension aux suites à valeurs complexes : parties réelle et imaginaire, conjuguée et module d'une suite complexe ; suite bornée ; limite d'une suite complexe, caractérisation à l'aide des parties réelle et imaginaire ; toute suite convergente est bornée ; opérations sur les limites de suites convergentes.
 - Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence, domination. Caractérisation à l'aide du quotient pour les suites non nulles à partir d'un certain rang. Propriétés, opérations.
- Comparaison des suites de références : $(n^\alpha)_n$, $(a^n)_n$, $((\ln n)^\beta)_n$ et $(n!)_n$.
Aucun équivalent usuel n'a été vu à ce stade l'année.

Espaces vectoriels (début)

- Définition. Exemples fondamentaux : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, E^Ω , (cas particuliers \mathbb{K}^Ω et $\mathbb{K}^\mathbb{N}$).
- Combinaison linéaire.
- Sous-espace vectoriel. Caractérisation. Intersection, somme, somme directe (caractérisations). Supplémentaire. Sous-espace engendré par une partie (défini comme l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de cette partie), propriétés, caractérisation, cas particulier d'une partie finie. Sous-espace vectoriel engendré d'une famille finie de vecteurs.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Toute suite croissante majorée converge. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Théorème des gendarmes.
- Théorème des suites adjacentes.
- L'intersection d'une famille (quelconque) de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. C'est le plus petit sous-espace vectoriel les contenant.
- Caractérisations de la notion de somme directe.