Lycée Sainte-Geneviève **2026-2027**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n° 8

Semaine du 23 au 29 novembre 2026

Calcul matriciel et systèmes linéaires

- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, définitions, généralités.
- Opérations (somme, multiplication par un scalaire, produit, transposée). Propriétés.
- Matrices élémentaires. Produit de deux matrices élémentaires.
- Systèmes linéaires. Écriture matricielle. Structure de l'ensemble des solutions. Résolution de «petits» systèmes, éventuellement avec paramètre(s), par la méthode du pivot de Gauss.
- Ensemble des matrices carrées.
  - Puissances. Nilpotence ; formule du binôme de Newton, formule de Bernoulli ;
  - Matrices triangulaires, diagonales, scalaires. Propriétés.
  - Matrices symétriques, antisymétriques. Propriétés.
  - Ensemble des matrices inversibles. Propriétés
- Opérations élémentaires. Matrices d'opérations élémentaires : matrices de transvection, d'échange (ou permutation) et de dilatation. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution du système linéaire $AX = Y$ avec Y générique et par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; son inverse est alors triangulaire.

Suites réelles (début)

- Définitions et caractérisations : constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée, croissante, décroissante, monotone ; suite extraite.
- Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes d'ordre 2 (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
- Suites convergentes.
  - Unicité de la limite.
  - Toute suite convergente est bornée.
  - Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
- Limites infinies.
- Opérations sur les limites (addition, multiplication par un scalaire, produit, inverse, composition par une fonction) et compatibilité avec la relation d'ordre.

Note aux colleurs : les théorèmes d'existence de limite (limite monotone, encadrement et comparaison, suites adjacentes) ne sont pas au programme cette semaine.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Associativité du produit matriciel.
- Transposée d'un produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par somme et produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices inversibles par inverse, produit, puissance et transposée.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si, pour tout Y, le système $AX = Y$ possède une unique solution.
- Toute matrice carrée s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- Unicité de la limite d'une suite convergente.
- Toute suite convergente est bornée.
- Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente de même limite.
- Si $u_{2n} \longrightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \longrightarrow \ell$ alors $u_n \longrightarrow \ell$.