

## Programme de la colle n° 7 Semaine du 18 au 23 novembre 2024

### Ensembles de nombres et relation d'ordre

- Notions de majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure (pour une partie de  $\mathbb{R}$ ).
- Toute partie de  $\mathbb{N}$  non vide admet un plus petit élément ; toute partie de  $\mathbb{N}$  non vide et majorée admet un plus grand élément.
- Toute partie de  $\mathbb{Z}$  non vide et minorée (resp. majorée) admet un plus petit (resp. plus grand) élément .
- Toute partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).
- Partie entière. Définition et caractérisations.
- Intervalles.

### Calcul matriciel et systèmes linéaires

- Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , définitions, généralités.
- Opérations (somme, multiplication par un scalaire, produit, transposée). Propriétés.
- Matrices élémentaires. Produit de deux matrices élémentaires.
- Systèmes linéaires. Écriture matricielle. Structure de l'ensemble des solutions. Résolution de «petits» systèmes, éventuellement avec paramètre(s), par la méthode du pivot de Gauss.
- Ensemble des matrices carrées.
  - Puissances. Nilpotence. Formule du binôme de Newton, formule de Bernoulli.
  - Matrices triangulaires, diagonales, scalaires. Propriétés.
  - Matrices symétriques, antisymétriques. Propriétés.
  - Ensemble des matrices inversibles. Propriétés
- Opérations élémentaires. Matrices d'opérations élémentaires : matrices de transvection, d'échange (ou permutation) et de dilatation. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution du système linéaire  $AX = Y$  avec  $Y$  générique et par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; son inverse est alors triangulaire.

---

### Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Existence et unicité de la partie entière.
- Associativité du produit matriciel.
- Transposée d'un produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par somme et produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices inversibles par inverse, produit, puissance et transposée.
- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible si et seulement si, pour tout  $Y$ , le système  $AX = Y$  possède une unique solution.