Lycée Sainte-Geneviève **2025-2026**
PCSI 1 - Mathématiques

Programme de la colle n° 7

Semaine du 17 au 22 novembre 2025

Ensembles de nombres et relation d'ordre

- Notions de majorant, minorant, maximum, minimum, borne supérieure, borne inférieure (pour une partie de $\mathbb{R}$).
- Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément ; toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée admet un plus grand élément.
- Toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et minorée (resp. majorée) admet un plus petit (resp. plus grand) élément .
- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure).
- Partie entière. Définition et caractérisations.
- Intervalles.

Calcul matriciel et systèmes linéaires

- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, définitions, généralités.
- Opérations (somme, multiplication par un scalaire, produit, transposée). Propriétés.
- Matrices élémentaires. Produit de deux matrices élémentaires.
- Systèmes linéaires. Écriture matricielle. Structure de l'ensemble des solutions.
  Résolution de «petits» systèmes, éventuellement avec paramètre(s), par la méthode du pivot de Gauss.
- Ensemble des matrices carrées.
  - Puissances. Nilpotence. Formule du binôme de Newton, formule de Bernoulli.
  - Matrices triangulaires, diagonales, scalaires. Propriétés.
  - Matrices symétriques, antisymétriques. Propriétés.
  - Ensemble des matrices inversibles. Propriétés
- Opérations élémentaires. Matrices d'opérations élémentaires : matrices de transvection, d'échange (ou permutation) et de dilatation. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution du système linéaire $AX = Y$ avec Y générique et par l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; son inverse est alors triangulaire.

Questions de cours (démonstrations à connaître)

- Existence et unicité de la partie entière.
- Associativité du produit matriciel.
- Transposée d'un produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures par somme et produit.
- Stabilité de l'ensemble des matrices inversibles par inverse, produit, puissance et transposée.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si, pour tout Y, le système $AX = Y$ possède une unique solution.